UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI, CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
SPECIALIZAREA MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

LUCRARE DE DIPLOMĂ

FUNCŢII INJECTIVE OLOMORFE PE DISCUL UNITATE ÎN PLANUL COMPLEX

Conductor ştiinţific:
Prof. Dr. Gabriela Kohr

Absolvent:
Diana Troancă

2011

Cuprins

Introducere **3**

1 Funcţii olomorfe şi funcţii integrabile (Cauchy). Rezultate generale **5**

1.1 Funcţii olomorfe 5

1.2 Integrala complexă 22

1.3 Reprezentarea conformă 32

1.3.1 Funcţii univalente. Proprietăţi generale 32

1.3.2 Reprezentarea conformă în planul complex 36

2 Funcţii univalente şi lanţuri de subordonare diferenţială **39**

2.1 Clasa S 39

2.1.1 Proprietăţile generale ale clasei S 40

2.1.2 Convergenţa în nucleu 49

2.2 Funcţii stelate, convexe şi spiralate 50

2.2.1 Funcţii stelate 51

2.2.2 Funcţii convexe 54

2.2.3 Funcţii spiralate 59

2.3 Rezultate generale din teoria lanţurilor de subordonare diferenţială. Ecuaţia diferenţială Loewner 62

3 Aplicaţii **77**

3.1 Condiţii de injectivitate globală prin metoda lanţurilor Loewner . . . 77

3.2 Caracterizările analitice ale unor subclase de funcţii univalente prin metoda lanţurilor Loewner 81
3.3 Condiţii necesare şi suficiente de univalenţă pentru funcţii olomorfe pe discul unitate 86
3.4 Condiţii suficiente de univalenţă pentru funcţii olomorfe pe domenii convexe în $\mathbb{C}$ 90

Bibliografie **94**

Introducere

În această lucrare de licenţă am prezentat unele rezultate clasice din teoria funcţiilor univalente de o variabilă complexă. Am structurat lucrarea pe trei capitole după cum urmează.

În primul capitol am prezentat noţiunile de funcţie olomorfă şi funţie integrabilă (Cauchy). În prima secţiune m-am referit la câteva rezultate cunoscute privind funcţiile olomorfe în planul complex. În acest sens am prezentat Teoremele lui Cauchy-Riemann, Montel, Vitali, Hurwitz, Weierstrass, etc., şi am dat câteva exemple concrete de funcţii întregi. În secţiunea a doua m-am referit la integrala complexă şi în acest sens am prezentat Teorema fundamentală a lui Cauchy, Formulele lui Cauchy pentru cerc, Teorema de legătură între primitivă şi integrală, etc. În ultima secţiune m-am referit la reprezentarea conformă a domeniilor simplu conexe din planul complex.

În capitolul al doilea m-a referit la unele subclase speciale de funcţii univalente pe discul unitate şi de asemenea am prezentat rezultate fundamentale din teoria lanţurilor de subordonare diferenţială. În prima secţiune am prezentat clasa S a funcţiilor normate, univalente pe discul unitate, precum şi nucleul de convergenţă în sens Carathéodory. În continuare m-am referit la subclasele lui S formate din funcţiile stelate, convexe şi spiralate pe discul unitate. În finalul acestui capitol am prezentat unele rezultate importante care caracterizează noţiunea de lanţ de subordonare diferenţială şi am arătat că lanţurile de subordonare sunt caracterizate de ecuaţia diferenţială Loewner.

În capitolul trei am prezentat câteva aplicaţii concrete ale metodei lanţurilor Loewner în studiul funcţiilor univalente pe discul unitate. În acest sens am demonstrat criteriul de univalenţă a lui Becker şi am prezenta caracterizările analitice ale stelarităţii, convexităţii şi spiralităţii folosind metoda lanţurilor Loewner.

În ultimele două secţiuni am prezentat câteva criterii de univalenţă pentru funcţii olomorfe datorate lui S. Kim, D. Minda şi E. Janiec.

Lucrarea se încheie cu o bibliografie selectivă pe care am utilizat-o pe parcursul elaborării acestei lucrări de licenţă. Sursele principale bibliografice la care am apelat sunt: [KM], [HMN], [MBS], [GK]. De asemenea au fost utile următoarele surse bibliografice: [BG], [Du], [Po], [RR], [Ro], [Co], [KiMi] şi [Ja].

Constituţia originală a lucrării constă în faptul că am parcurs şi am sintetizat într-o manieră proprie materialul bibliografic indicat şi am inclus unele rezultate fundamentale referitoare la funcţiile univalente de o variabilă complexă: teoremele de acoperire, deformare, estimarea coeficientului a_2 pentru funcţii din clasa S, ecuaţia diferenţială Loewner, caracterizările analitice ale stelarităţii, spiralităţii şi convexităţii prin metoda lanţurilor Loewner, precum şi condiţii necesare şi suficiente de univalenţă folosind metrica hiperbolică pe discul unitate. De asemenea am detaliat demonstraţiile unor rezultate şi am inclus exemple concrete, care au fost utile pentru înţelegerea rezultatelor prezentate. Pentru unele dintre aceste exemple am dat soluţii originale prin una sau mai multe metode. Ţin să menţionez că am consultat surse bibliografice suplimentare pentru a-mi forma o idee generală despre noţiunile şi rezultatele prezentate în această lucrare de licenţă.

Capitolul 1

Funcţii olomorfe şi funcţii integrabile (Cauchy). Rezultate generale

În acest capitol vom prezenta rezultate generale referitoare la funcţiile olomorfe de o variabilă complexă. De asemenea, vom prezenta şi unele rezultate fundamentale privind noţiunea de integrală complexă (Cauchy). Menţionăm că sursele principale bibliografice utilizate pe parcursul elaborării acestui capitol sunt [HMN] şi [KM]. De asemenea au fost utile: [Kr], [Co], [F].

1.1 Funcţii olomorfe

În această secţiune vom prezenta câteva rezultate clasice referitoare la noţiunea de funcţie olomorfă. Aceste rezultate vor fi utile în alcătuirea capitolelor următoare.

Notaţii

• $C(A)$ este mulţimea funcţiilor definite pe mulţimea A care sunt continue pe A

• $C^1(A)$ este mulţimea funcţiilor definite pe mulţimea A care sunt continue şi derivabile pe A

- $A^c = \mathbb{C} \setminus A$ se numeşte complementara mulţimii A
- Pentru $z \in \mathbb{C}^*$, $\arg z = \theta$, unde $\theta \in (-\pi, \pi]$ este soluţia ecuaţiei

$$\cos\theta + i\sin\theta = \frac{z}{|z|}$$

- Arg : $\mathbb{C}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ este aplicaţia multivocă argument cu

$$\mathrm{Arg}\,(z) = \{\arg z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad z \in \mathbb{C}^*$$

- $U(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ se numeşte disc centrat în z_0 de rază $r > 0$
- $U = U(0, 1)$
- $U(z_0; r) = U(z_0; r) \setminus \{z_0\}$ se numeşte disc punctat în z_0 de rază $r > 0$
- $U(z_0; r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_0\}$ se numeşte coroană circulară centrată în z_0 de raze r_1 şi r_2

Mulţimea $A \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte deschisă dacă pentru $\forall\ z_0 \in A$, $\exists\ U(z_0; r) \subset A$.

Menţionăm că $\mathbb{C}$ şi $\emptyset$ sunt mulţimi deschise.

Mulţimea $A \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte închisă dacă A^c este deschisă.

Menţionăm că $\mathbb{C}$ şi $\emptyset$ sunt mulţimi închise.

O mulţime $A \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte mărginită dacă $\exists\ U(0; r)$ astfel încât $A \subset U(0; r)$.

O mulţime $A \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte conexă dacă $\forall\ B \subset A$, $B \neq \emptyset$ şi $B \neq A$ nu este simultan închisă şi deschisă în A.

O mulţime $D \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte domeniu dacă este deschisă şi conexă.

Un domeniu $D \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte stelat în raport cu $z_0 \in D$ dacă $\forall\ z \in D$, segmentul $[z_0, z] \subset D$, unde $[z_0, z_1] = \{z \in \mathbb{C} \mid z = z_0 + t(z_1 - z_0),\ t \in [0, 1]\}$.

Un domeniu $D \subseteq \mathbb{C}$ care e stelat în raport cu orice punct al său se numeşte domeniu convex.

Un punct $z_0 \in A$, $A \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte punct de aderenţă pentru A, dacă pentru $\forall\ U(z_0; r)$ avem că $U(z_0; r) \cap A \neq \emptyset$.

Un punct $z_0 \in A$, $A \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte punct de acumulare pentru A, dacă pentru $\forall\ U(z_0; r)$ avem că $\dot{U}(z_0; r) \cap A \neq \emptyset$.

Un punct $z_0 \in A$, $A \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte punct de frontieră pentru mulţimea A dacă pentru orice $U(z_0; r)$ avem $U(z_0; r) \cap A \neq \emptyset$ şi $U(z_0; r) \cap A^c \neq \emptyset$.

$\overline{A}$ este mulţimea tuturor punctelor de aderenţă a mulţimii A şi se mai numeşte şi închiderea mulţimii A.

A' este mulţimea punctelor de acumulare a mulţimii A şi se mai numeşte şi derivata mulţimii A.

∂A este mulţimea punctelor de frontieră a mulţimii A şi se numeşte frontiera mulţimii A.

Definiţia 1.1.1. Funcţie complexă de o variabilă reală. Avem $[a, b]$ un interval real. Atunci $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ este o funcţie complexă de o variabilă reală, dacă îi asociază fiecărui punct $x \in [a, b]$ un unic număr complex $f(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$ din $\mathbb{C}$.

Definiţia 1.1.2. Funcţie complexă de o variabilă complexă. Dacă $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$ îi asociază fiecărui număr complex din A un unic număr complex pe care îl putem scrie sub forma

$$f(z) = u(z) + iv(z).$$

Definiţia 1.1.3. Limita unei funcţii complexe. Fie $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$ o funcţie complexă de variabilă complexă. Atunci f are limita l în punctul a,

$$\lim_{z \to a} f(z) = l,$$

dacă şi numai dacă $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \eta > 0$ astfel încât $z \in A$, $0 < |z - a| < \eta \;\Rightarrow\; |f(z) - l| < \varepsilon$.

Corolar 1.1.4. $\lim\limits_{z \to a} f(z) = l$ *dacă şi numai dacă* $\lim\limits_{z \to a} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} l$ *şi*

$$\lim_{z \to a} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} l.$$

Definiţia 1.1.5. Continuitatea funcţiilor complexe. O funcţie complexă $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$ este continuă în $z_0 \subset A$ dacă

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Funcţia f se numeşte continuă pe A, dacă este continuă în z pentru $\forall\ z \in A$.

Corolar 1.1.6. *Funcţiile care se pot scrie ca sumă sau produs de două funcţii continue, sunt la rândul lor continue. Funcţiile care pot fi scrise ca şi câtul a două* *funcţii continue în z_0, dintre care a doua funcţie este nenulă în punctul z_0, sunt la rândul lor continue în z_0.*

Definiţia 1.1.7. Derivabilitate. Fie $f : A \to \mathbb{C}$m $A \subseteq \mathbb{C}$. Atunci f se numeşte derivabilă în punctul $z_0 \in A$ dacă există şi este finită limita:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Dacă aceasta există o notăm cu $f'(z_0)$ care este derivata funcţiei f în z_0.

Definiţia 1.1.8. Olomorfie. Funcţia $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$, deschisă se numeşte olomorfă dacă ea este derivabilă în orice punct $z_0 \in A$.

O funcţie se numeşte olomorfă pe o mulţime oarecare G dacă există o mulţime deschisă A cu $G \subset A$ astfel încât f olomorfă pe A.

Funcţiile olomorfe pe întreg planul complex se numesc funcţii întregi. Notăm cu $\mathcal{H}(A)$ mulţimnea funcţiilor olomorfe pe A.

Definiţia 1.1.9. Funcţie $\mathbb{R}$-diferenţiabilă. Fie $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă. Atunci f este $\mathbb{R}$-diferenţiabilă în punctul $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$ dacă există două numere complexe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ şi o funcţie complexă $g : A \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ astfel încât

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = 0$$

şi $\forall\ z = x + iy \in A \setminus \{z_0\}$ să aibă loc relaţia:

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + g(z)|z - z_0|.$$

Definiţia 1.1.10. Funcţie $\mathbb{C}$-diferenţiabilă. Fie $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă. Atunci f este $\mathbb{C}$-diferenţiabilă sau diferenţiabilă în punctul $z_0 \in A$ dacă există un număr complex $\alpha \in \mathbb{C}$ şi o funcţie complexă $g : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ astfel încât

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = 0$$

şi $\forall\ z = x + iy \in A \setminus \{z_0\}$ să aibă loc relaţia:

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + g(z)(z - z_0).$$

Teorema 1.1.11. (Caracterizare pentru funcţiile derivabile). *Fie* $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$. *Atunci* f *este derivabilă în* $z_0 \in A$ *dacă şi numai dacă* f *este diferenţiabilă în* z_0.

Teorema 1.1.12. (Cauchy-Riemann). *Fie* $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$ *deschisă şi* $f = u + iv$. *Atunci* f *este derivabilă în* $z_0 \in A$ *dacă şi numai dacă* f *este* $\mathbb{R}$-*diferenţiabilă în* z_0 *şi derivatele parţiale ale funcţiilor reale* u *şi* v *îndeplinesc condiţiile Cauchy-Riemann:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{şi} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

Observaţia 1.1.13. Există funcţii $\mathbb{R}$-diferenţiabile care nu sunt $\mathbb{C}$-diferenţiabile. Prin urmare, în Teorema 1.1.12 ambele condiţii ($\mathbb{R}$-diferenţiabilitate şi sistemul Cauchy-Riemann) sunt esenţiale în stabilirea derivabilităţii funcţiei f.

Exemple 1.1.14. (Exemple de funcţii olomorfe pe $\mathbb{C}$).

a) **Funcţia exponenţială**

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*, \quad f(z) = e^z$$

Pentru $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ avem $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Avem că $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Observăm că f este nelimitat derivabilă şi avem că:

$$f^{(n)}(z) = e^z = f(z).$$

Observăm de asemenea că $f(z + 2k\pi i) = e^{t+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z = f(z)$, deci f este periodică cu perioada $2\pi i$.

Domeniul de injectivitate al funcţiei f este $B_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi\}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ecuaţia $e^z = \omega$, $\omega \in \mathbb{C}^*$ are o infinitate de soluţii, şi anume:

$$z = \ln |\omega| + i(\arg \omega + 2k\pi).$$

Din aceste soluţii obţinem aplicaţia multivocă logaritm $\operatorname{Log} : \mathbb{C}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z, \quad z \in \mathbb{C}^*,$$

unde $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$.

b) **Funcţia putere**

$$F : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, \quad F(z) = z^{\alpha}, \text{ cu } \alpha \in \mathbb{C}$$

Avem că $F(z) = z^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Log} z}$.

Fie $f L \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}^*$, $f(z) = e^{\alpha \log z}$. Atunci f este ramura principală a lui F şi este olomorfă cu $f'(z) = \alpha z^{\alpha - 1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

c) **Funcţiile trigonometrice**

$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{şi} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \text{ pentru } z \in \mathbb{C}$$

Avem că funcţiile $\cos, \sin \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ cu

$$\left.\begin{aligned} \cos'(z) &= -\sin z \\ \sin'(z) &= \cos z \end{aligned}\right. \quad z \in \mathbb{C}$$

d) **Funcţiile trigonometrice hiperbolice**

$$\operatorname{ch} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \operatorname{sh} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \quad \text{şi} \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Avem că funcţiile $\operatorname{ch}, \operatorname{sh} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ cu

$$\operatorname{sh}'(z) = \operatorname{ch}(z)$$

$$\operatorname{ch}'(z) = \operatorname{sh}(z)$$

Demonstraţie.

$$\operatorname{sh}'(z) = \left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\right)' = \frac{(e^{z})' - (e^{-z})'}{2} = \frac{e^{z} - (-e^{-z})}{2} = \operatorname{ch}(z).$$

Proprietăţi elementare ale funcţiilor olomorfe

Teorema maximului modulului 1.1.15. *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Dacă există $z_0 \in D$ astfel încât*

$$|f(z_0)| = \max\{|f(z)| \mid z \in D\},$$

atunci f este constantă.

Consecinţe ale teoremei maximului modulului:

Corolar 1.1.16. *Fie $D \subset \mathbb{C}$ domeniu mărginit, $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(D)$ şi $f \in C(\overline{D})$. Atunci*

$$\max\{|f(z)| \mid z \in \overline{D}\} = \max\{|f(z)| \mid z \in \partial D\}.$$

Lema lui Schwarz 1.1.17. *(i) Fie $M >$. Dacă $f \in \mathcal{H}(U)$ cu $f(0) = 0$, $|f(z)| < M$, $\forall\ z \in U$, atunci*

$$|f(z)| \leq M|z|,\ \forall\ z \in U \text{ şi } |f'(0)| \leq M.$$

Dacă există $z_0 \in \dot{U}$ astfel încât $|f(z_0)| = M|z_0|$ sau dacă $|f'(0)| = M$, atunci există $\alpha \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$|\alpha| = M \quad \text{şi} \quad f(z) = \alpha z,\ \forall\ z \in U.$$

(ii) Dacă, în plus, $f'(0) = 0$, atunci $|f(z)| \leq \dfrac{M}{r^2}|z|^2$, $|z| \leq r < 1$.

Consecinţă a Lemei lui Schwarz:

Corolar 1.1.18. *Dacă $f : U \to U$ este olomorfă, $a \in U$ astfel încât $f(a) = 0$, atunci*

$$|f(z)| \leq |(z - a)/(1 - \overline{a}z)|, \quad \forall\ z \in U.$$

În continuare prezentăm o formă mai generală a Lemei lui Schwarz, denumită şi Lema Schwarz-Pick.

Lema 1.1.19. *Fie $f : U \to U$ o funcţie olomorfă. Atunci au loc:*

(i) $\left|\dfrac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)}\right| \leq \left|\dfrac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}z_2}\right|$, $\forall\ z_1, z_2 \in U$

(ii) $|f'(z)| \le \dfrac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$.

Dacă, în plus, f este injectivă şi $f(U) = U$, atunci în (i) avem egalitate pentru orice $z_1, z_2 \in U$ şi în (ii) pentru orice $z \in U$.

Reciproc, dacă are loc egalitatea în (i) pentru o pereche $(z_1, z_2) \in U \times U$ sau în (ii) pentru un punct $z \in U$, atunci f este injectivă şi $f(U) = U$.

În cele ce urmează vom introduce metrica hiperbolică.

Definim funcţia $d_h : U \times U \to [0, \infty)$ prin:

$$d_h(a,b) = \operatorname{arctg} h \left| \frac{a-b}{1-\overline{a}b} \right|.$$

Se observă că:

$$d_h(a,b) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 + \left| \dfrac{a-b}{1-\overline{a}b} \right|}{1 - \left| \dfrac{a-b}{1-\overline{a}b} \right|} \right], \quad a, b \in U.$$

Funcţia d_h definită astfel se numeşte *metrica hiperbolică* sau *metrica Poincaré* a discului unitate.

Următoarea lemă ne arată că d_h este într-adevăr o metrică.

Lema 1.1.20. *Funcţia d_h este o metrică pe U, care generează o topologie echivalentă cu topologia naturală.*

Observaţie. Pe baza Lemei Schwarz-Pick rezultă că

$$d_h(f(a), f(b)) \le d_h(a,b), \quad a, b \in U, \ \forall\ f \in \mathcal{H}(U) \text{ cu } f(U) \subseteq U.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă f este olomorfă şi injectivă pe discul unitate U, iar $f(U) = U$.

În continuare prezentăm o teoremă cu un corolar al ei, utile în studiul comportamentului local al funţiilor analitice.

Primul rezultat este cunoscut sub numele de **Teorema aplicaţiei deschise**.

Teorema 1.1.21. *Fie A o mulţime deschisă, $A \subseteq \mathbb{C}$ şi $f : A \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă care nu este constantă pe nici o componentă conexă a lui A. Atunci $f(B)$ este o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$ pentru orice mulţime deschisă $B \subseteq A$.*

Următorul caz particular rezultă direct din această teoremă şi este cunoscut sub numele de **Teorema de invarianţă a domeniului**.

Corolar 1.1.22. *Fie A un domeniu din $\mathbb{C}$ şi $f : A \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă neconstantă. Atunci $f(A)$ este tot un domeniu în $\mathbb{C}$.*

În cele ce urmează vom introduce cele trei tipuri de convergenţă relative la şiruri de funcţii complexe definite pe o mulţime deschisă.

Definiţia 1.1.23. Fie şirul de funcţii complexe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite pe mulţimea A deschisă.

(i) Şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge în punctul $a \in A$ dacă şirul $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Dacă şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge în orice punct $z \in B$, $B \subset A$, atunci spunem că $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplu (punctual) pe B.

Ca şi notaţie, dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplu spre funcţia f avem: $f_n \to f$.

(ii) Spunem că şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este uniform convergent pe A la funcţia f dacă $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall\ n \geq n_\varepsilon$ să aibă loc:

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \text{ pentru orice } z \in A.$$

Ca şi notaţie avem $f_n \overset{u.}{\rightrightarrows} f$.

(iii) Spunem că şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este uniform convergent pe compacte în A la funcţia f dacă $\forall\ \varepsilon > 0$ şi orice compact $K \subset A$, $\Box n_{\varepsilon,K} \in \mathbb{N}$ astfel încât $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ pentru orice $z \in K$ şi $n \geq n_{\varepsilon,K}$.

Cu alte cuvinte, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este uniform convergent pe compacte în A la funcţia f dacă pentru orice compact $K \subset A$ şirul restricţiilor $(f_n|_K)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent uniform pe K la $f|_K$.

Ca şi notaţie avem: $f_n \overset{u.c.}{\rightrightarrows} f$.

Observăm că orice şir de funcţii convergent uniform în A este şi convergent uniform pe compacte în A. De asemenea orice şir convergent pe compacte în A, converge şi simplu în A.

Deci avem relaţiile: $f_n \overset{u.}{\rightrightarrows} f \ \Rightarrow\ f_n \overset{u.c.}{\rightrightarrows} f \ \Rightarrow\ f_n \to f$.

Vom prezenta în continuare teoreme ce arată legăturile dintre tipurile de convergenţă definite.

Prima teoremă de acest gen este **Teorema lui Weierstrass**.

Teorema 1.1.24. *Fie* $A \subseteq \mathbb{C}$ *o mulţime deschisă. Dacă* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de funcţii olomorfe pe* A *şi* $f_n \overset{u.c.}{\rightrightarrows} f$ *atunci* $f \in \mathcal{H}(A)$ *şi* $f_n^{(k)} \overset{u.c.}{\rightrightarrows} f^{(k)}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Relativ la proprietatea funcţiilor olomorfe de analiticitate prezentăm următorul rezultat.

Definiţia 1.1.25. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{C}$.

Funcţia f se numeşte analitică pe A dacă pentru orice punct $a \in A$, există un disc $U(a;r) \subseteq A$ şi o serie de puteri $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ convergentă în $U(a;r)$ astfel încât

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k, \quad \forall\, z \in U(a;r).$$

Coeficienţii C_k ai seriei de puteri se pot determina unic din relaţia:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Teorema 1.1.26. *Fie* $A \subseteq \mathbb{C}$ *o mulţime deschisă şi* $f : A \to \mathbb{C}$. *Atunci* f *este olomorfă pe* A *dacă şi numai dacă* f *este analitică pe* A.

Pentru a prezenta o altă teoremă, definim mai întâi noţiunea de mulţime local uniform mărginită.

Definiţia 1.1.27. Fie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(A)$. Mulţimea $\mathcal{F}$ se numeşte local uniform mărginită dacă pentru orice mulţime compactă $K \subset A$, există o constantă $L_K > 0$ astfel încât $\|f\|_K \leq L$ pentru orice $f \in \mathcal{F}$, unde

$$\|f\|_K = \sup\{|f(z)| \mid z \in K\}.$$

Observaţia 1.1.28. Ştim că pentru orice mulţime compactă din A există o acoperire finită formată din discuri închise de tipul $\overline{U}(z_k, r_k)$, $k = \overline{1,p}$ cu $z_k \in A$, $r_k > 0$, $p \in \mathbb{N}$. Datorită acestei proprietăţi deducem că în definiţia anterioară putem înlocui mulţimea compactă cu orice disc închis din A.

În plus, dacă înlocuim A cu discul $U(z_0; r)$, atunci orice compact K din A poate fi inclus într-un disc închis de tipul $\overline{U}(z_0; r_1)$ cu $r_1 < r$.

Deci proprietatea de local uniform mărginire a mulţimii $\mathcal{F}$ se reduce la mărginirea pe orice disc închis $\overline{U}(z_0; \rho)$ cu $\rho < r$.

Observaţia 1.1.29. Ştim că orice compact poate fi acoperit de un număr finit de discuri închise. Deci compactele K pot fi înlocuite cu orice disc închis din A. În plus, dacă A este un disc $U(z_0; r)$, atunci orice compact $K \subseteq \overline{U}(z_0; \rho)$ cu $\rho < r$. Deci studiul proprietăţii mulţimii $\mathcal{F}$ de local uniform mărginită revine la mărginirea sa pe orice disc închis $\overline{U}(z_0; \rho)$ cu $\rho < r$.

Ca şi exemple de funcţii local uniform mărginite avem:

(i) Fie B o mulţime deschisă şi mărginită din $\mathbb{C}$ şi $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(A) \mid f(a) \subseteq B\}$.

Observăm că B fiind deschisă şi mărginită este inclusă într-un disc, adică $\exists\, R > 0$ astfel încât $B \subseteq U(0; R)$, dar $f(A) \subseteq B \ \Rightarrow\ |f(x)| < R$, $\forall\, x \in A$.

În concluzie, mulţimea $\mathcal{F}$ este local uniform mărginită.

(ii) Fie $M > 0$ şi

$$\mathcal{F}_M = \left\{ f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \mathcal{H}(U) \mid |a_k| \leq M \right\}$$

şi fie $r \in (0, 1)$. Dacă $z \in U(0; r)$ atunci $|z| \leq r$ implică

$$|f(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k||z|^k \leq M \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{M}{1-r}.$$

Deci mulţimea $\mathcal{F}_M$ este local uniform mărginită.

Definiţia 1.1.30. Fie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(A)$, atunci mulţimea $\mathcal{F}$ se numeşte relativ compactă dacă orice şir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ conţine un subşir convergent uniform pe compacte în A.

Rezultatul următor ne arată legătura dintre cele două proprietăţi definite anterior.

Teorema 1.1.31. (Teorema lui Montel). *Fie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(A)$. Atunci $\mathcal{F}$ este relativ compactă dacă şi numai dacă ea este local uniform mărginită.*

Observaţia 1.1.32. Teorema lui Montel nu are loc pentru funcţiile real-analitice. Un contraexemplu în acest sens ar fi şirul de funcţii $(\sin kx)_{k\in\mathbb{N}}$ care e mărginit uniform pe orice interval compact din $\mathbb{R}$, dar pe nici un interval compact nu conţine un subşir convergent.

Un alt rezultat în legătură cu convergenţa uniformă pe compacte a şirurilor de funcţii olomorfe local uniform mărginite este **Teorema lui Vitali**.

Teorema 1.1.33. *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $F \subseteq A$ astfdel încât F are cel puţin un punct de acumulare în A. Dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir local uniform mărginit de funcţii olomorfe pe A şi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent în orice punct $z \in F$, adică şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge punctual pe F, atunci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform pe compacte în A.*

Folosind rezultatul precedent, se obţine următoarea condiţie necesară şi suficientă de convergenţă uniformă pe compacte a şirurilor de funcţii olomorfe.

Teorema 1.1.34. *Dacă $A \subseteq \mathbb{C}$ este un domeniu şi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir local uniform mărginit de funcţii olomorfe pe A, atunci şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent uniform pe compacte în A dacă şi numai dacă există un punct $a \in A$ astfel încât şirul $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ să fie convergent pentru orice $p \in \mathbb{N}$.*

Pentru a putea prezenta rezultatul central al acestui subcapitol, vom introduce mai întâi câteva noţiuni legate de structura topologică şi metrică a spaţiului $\mathcal{H}(A)$.

Definiţia 1.1.35. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă. Numim **topologia naturală** pe $\mathcal{H}(A)$ acea topologie pentru care o bază de mulţimi deschise a unui punct $f \in \mathcal{H}(A)$ este formată din mulţimile $V_{K,\varepsilon}$ de forma:

$$V_{k,\varepsilon}(f) = \{g \in \mathcal{H}(A) \mid |g(z) - f(z)| < \varepsilon,\ z \in K\},$$

$K \subseteq A$, K compactă, $\varepsilon > 0$.

Observaţia 1.1.36. (i) Un şir de funcţii olomorfe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pe mulţimea deschisă A converge în raport cu topologia naturală la funcţia f dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $K \subset A$ un compact, există $n_0(\varepsilon, K) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,\ \forall\ n \geq n_0,\ z \in K.$$

Cu alte cuvinte, şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la f în raport cu topologia naturală a lui $\mathcal{H}(A)$ dacă şi numai dacă şirul converge uniform pe compacte în A la f.

(ii) Din definiţia topologiei naturale rezultă că $\mathcal{H}(A)$ este un spaţiu topologic Hausdorff.

Menţionăm că un spaţiu topologic $\mathcal{T}$ definit pe mulţimea X este spaţiu Hausdorff, dacă verifică axioma:

$\forall\ x \neq y \in X$, $\exists\ O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ (O_1 şi O_2 mulţimi deschise) cu $x \in O_1$, $y \in O_2$ şi $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

Definiţia 1.1.37. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ un şir de mulţimi compacte din A. Spunem că şirul $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ formează o exhaustiune normală a lui A dacă au loc următoarele proprietăţi:

(i) $K_j \subset int(K_{j+1})$, $\forall\ j \in \mathbb{N}$

(ii) $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = A$.

Lema 1.1.38. *Dacă $A \subseteq \mathbb{C}$ este o mulţime deschisă, atunci există o exhaustiune normală a lui A.*

Lema 1.1.39. *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ o exhaustiune normală a lui A şi $K \subset A$ o mulţime compactă. Atunci $\exists\ j \in \mathbb{N}$ astfel încât $K \subseteq K_j$.*

Definiţia 1.1.40. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $K \subset A$ o mulţime compactă.

Definim funcţia $\|\cdot\|_K : K \to [0, \infty)$ dată prin:

$$\|f\|_K = \sup\{|\rho(z)| \mid z \in K\}, \quad f \in \mathcal{H}(A).$$

Se observă că $\|\cdot\|_K$ este o seminormă pe K.

Lema 1.1.41. *Dacă $A \subseteq \mathbb{C}$ este un domeniu şi $K \subset A$ o mulţime infinită compactă, atunci $\|\cdot\|_K$ este o normă pe K.*

În continuare introducem o metrică pe $\mathcal{H}(A)$.

Relaţia 1.1.42. Considerăm $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ o exhaustiune normală a mulţimii A şi fie funcţia $\rho_A : \mathcal{H}(A) \times \mathcal{H}(A) \to [0, \infty)$

$$\rho_A(f,g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{\|f-g\|_{K_j}}{1 + \|f-g\|_{K_j}}, \quad f, g \in \mathcal{H}(A).$$

Observăm că $\rho_A(f,g) < \infty$ pentru $\forall\ f, g \in \mathcal{H}(A)$, datorită relaţiei:

$$\rho_A(f,g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{\|f-g\|_{K_j}}{1 + \|f-g\|_{K_j}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \infty.$$

În aceste condiţii are loc lema:

Lema 1.1.43. *ρ_A este o metrică pe $\mathcal{H}(A)$. De asemenea, topologia pe $\mathcal{H}(A)$ definită de ρ_A nu depinde de alegerea exhaustiunii normale $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ a lui A.*

Teorema 1.1.44. *Dacă $A \subseteq \mathbb{C}$ este o mulţime deschisă şi $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii olomorfe pe A, atunci şirul converge uniform pe compacte în A la funcţia f dacă şi numai dacă*

$$\lim_{k\to\infty} \rho_A(f_k, f) = 0.$$

În concluzie, obţinem următoarea teoremă:

Teorema 1.1.45. $(\mathcal{H}(A), \rho_A)$ *este un spaţiu metric complet.*

Definiţia 1.1.46. Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi $Y \subseteq X$. Familia de mulţimi $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ este acoperire pentru Y dacă $Y \subseteq \cup A$.

Acoperirea A se numeşte deschisă dacă $A \subseteq \mathcal{T}$.

Dacă A este acoperire pentru Y, atunci familia $B \subseteq A$ se numeşye subacoperire a lui A pentru Y, dacă $Y \subseteq \cup A_1$.

Definiţia 1.1.47. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic. Mulţimea $Y \subseteq X$ se numeşte compactă dacă pentru orice acoperire deschisă a lui Y există o subacoperire finită. Dacă mulţimea X este compactă, atunci spaţiul topologic (X, τ) se numeşte compact.

Definiţia 1.1.48. Fie un spaţiu topologic (X, τ). Acesta se numeşte secvenţial compact dacă orice şir din X are un subşir convergent.

O mulţime $Y \subseteq X$ se numeşte secvenţial compactă dacă spaţiul $(Y, \mathcal{T}_Y)$ este secvenţial compact.

Teorema lui Hausdorff ne arată că în anumite condiţii are loc echivalenţa între noţiunea de compactitate şi secvenţial compactitate.

Pentru a prezenta acest rezultat, avem nevoie de noţiunea de semimetrică.

Definiţia 1.1.49. Fie X o mulţime şi o aplicaţie $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$. Aplicaţia ρ se numeşte semimetrică dacă:

(i) $\rho(x, x) = 0,\ \forall\, x \in X$

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x),\ \forall\, x, y \in X$

(iii) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z),\ \forall\, x, y, z \in X.$

Dacă ρ este semimetrică pe X, atunci (X, ρ) se numeşte spaţiu semimetric.

Observaţia 1.1.50. Dacă în plus pentru ρ are loc: $\forall\, x, t \in X,\ x \neq y \ \Rightarrow$

$\rho(x, y) > 0$, atunci ρ se numeşte metrică.

Teorema 1.1.51. *Fie (X, ρ) un spaţiu semimetric.*

Atunci X este compact dacă şi numai dacă X este secvenţial compact.

Vom prezenta în cele ce urmează un rezultat central al acestui capitol.

Teorema 1.1.52. *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(A)$. Atunci $\mathcal{F}$ este compactă dacă şi numai dacă $\mathcal{F}$ este uniform mărginită şi închisă.*

Demonstraţie. Fie metrica definită de relaţia 1.1.42:

$$\rho_A : \mathcal{H}(A) \times \mathcal{H}(A) \to [0, \infty), \quad \rho_A(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{\|f - g\|_{K_j}}{1 + \|f - g\|_{K_j}},$$

unde $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ este o exhaustiune normală a mulţimii A.

Din Teorema 1.1.45 avem că $(\mathcal{H}(A), \rho_A)$ este un spaţiu metric complet. Din Teorema 1.1.51 a lui Hausdorff de caracterizare a spaţiilor metrice compacte rezultă că $\mathcal{F}$ este compactă dacă şi numai dacă $\mathcal{F}$ este secvenţial compactă, adică din orice şir $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ din $\mathcal{F}$ putem extrage un subşir $(f_{k_p})_{p \in \mathbb{N}}$ convergent în raport cu metrica ρ_A. Să notăm cu $f \in \mathcal{F}$ limita acestui subşir convergent. Din Teorema 1.1.44 avem că subşirul $(f_{k_p})_{p \in \mathbb{N}}$ converge uniform pe compacte la f dacă şi numai dacă $\lim\limits_{p \to \infty} \rho_A(f_{k_p}, f) = 0$. Deoarece convergenţa şirului $(f_{k_p})_{p \in \mathbb{N}}$ la f în raport cu metrica ρ_A este echivalentă cu convergenţa uniformă pe compacte a şirului la f, obţinem că $\mathcal{F}$ este compactă dacă şi numai dacă $\mathcal{F}$ este relativ compactă şi închisă. Din Teorema lui Montel 1.1.31 rezultă concluzia, şi anume că $\mathcal{F}$ este compactă dacă şi numai dacă $\mathcal{F}$ este local uniform mărginită şi închisă.

Exemplul 1.1.53. (i) Mulţimea

$$\mathcal{F} = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \in \mathcal{H}(U),\ f(0) = 1,\ \operatorname{Re} f(z) > 0,\ z \in U\}$$

este o submulţime compactă a lui $\mathcal{H}(U)$.

Demonstraţie. Pentru a schiţa pe scurt demonstraţia introducem mai întâi noţiunea de funcţie Schwarz.

O funcţie $\varphi : U \to \mathbb{C}$ se numeşte Schwarz dacă $\varphi \in \mathcal{H}(U)$, $\varphi(0) = 0$ şi $|\varphi(z)| < 1$, $\forall\ z \in U$.

Ideea centrală a demonstraţiei este că o funcţie $f \in \mathcal{F}$ dacă şi numai dacă funcţia dată de relaţia

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - 1}{f(z) + 1}$$

este funcţie Schwarz.

Implicaţia directă rezultă imediat prin faptul că $\operatorname{Re} f(z) > 0$, deci $\varphi \in \mathcal{H}(U)$, iar $|\varphi(z)| < 1$ este echivalent cu $\operatorname{Re} f(z) > 0$. Implicaţia inversă rezultă prin calcul direct a lui $\operatorname{Re} f(z)$ în funcţie de $\varphi(z)$.

Arătăm că $\mathcal{F}$ este compactă prin Teorema 1.1.52.

Studiem proprietatea de local uniform mărginire pe discuri compacte de forma $\overline{U(0;r)}$. Dacă scriem funcţia f sub forma

$$f(z) = \frac{\varphi(z) + 1}{1 - \varphi(z)}$$

cu φ o funcţie Schwarz şi folosind Lema lui Schwarz obţinem că f este local uniform mărginită pe orice disc închis $\overline{U}(0;r)$. Se observă imediat că familia $\mathcal{F}$ este închisă din proprietăţile trecerii la limită. Deci conform Teoremei 1.1.52 obţinem că $\mathcal{F}$ este compactă.

(ii) Fie $M > 0$. Atunci mulţimea

$$G = \{f \in \mathcal{H}(U) \mid |f(z)| \leq M,\ z \in U\}$$

este un alt exemplu de submulţime compactă a lui $\mathcal{H}(U)$.

Observaţia 1.1.54. Un spaţiu topologic X se numeşte spaţiu Montel, dacă X este spaţiu Fréchet, adică spaţiu metrizabil complet, şi X are proprietatea că mulţimile mărginite şi închise din X sunt compacte.

Deci din rezultatul anterior $\mathcal{H}(A)$ $(S \subseteq \mathbb{C})$ este un spaţiu Montel.

În continuare vom prezenta teorema convergenţei lui Blaschke şi apoi două variante ale teoremei lui Hurwitz relativ la convergenţa şirurilor de funcţii olomorfe.

Teorema 1.1.55. *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir uniform mărginit de funcţii olomorfe definite pe U. Dacă există $A = \{z_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset U$ o mulţime numărabilă astfel încât*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |z_k|) = \infty$$

şi există $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(z_j)$ *pentru orice punct* z_j *din* A*, atunci şirul* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniform pe compacte în* U*.*

Teorema 1.1.56. *Fie* $A \subseteq \mathbb{C}$ *un domeniu şi* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de funcţii olomorfe pe* A *cu proprietatea că şirul converge uniform pe compacte în* A *la funcţia* f*. Dacă* $f_n(z) \neq 0$ *pentru orice* $z \in A$, $n \in \mathbb{N}$*, atunci* $f \equiv 0$ *sau* $f(z) \neq 0$, $\forall\ z \in A$*.*

Un exemplu în care funcţia limită este identic nulă este şirul:

$$f_n(z) = \frac{z-a}{n},\ n \in \mathbb{N},\ z \in U(0,1) \text{ cu } a \in \mathbb{C} \text{ fixat astfel încât } |a| \geq 1.$$

Observăm că $f_n(z)$ verifică enunţul teoremei:

$$f_n \in \mathcal{H}(U(0,1)),\ f_n(z) \neq 0,\ \forall\ z \in U,\ n \in \mathbb{N}.$$

Dar $f_n \overset{u.c.}{\rightrightarrows} 0$ în U.

O altă variantă a teoremei lui Hurwitz este dată de corolarul următor.

Corolar 1.1.57. *Fie* $A \subseteq \mathbb{C}$ *un domeniu şi* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de funcţii olomorfe şi injective pe* A*. Dacă* $f_n \overset{u.c.}{\rightrightarrows} f$ *în* A*, atunci* f *este constantă sau injectivă pe* A*.*

În finalul acestui subcapitol introducem noţiunea de zerou al unei funcţii olomorfe şi două rezultate utile în capitolele următoare.

Definiţia 1.1.58. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Dacă $z_0 \in A$ este un punct astfel încât

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{şi} \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0,$$

atunci z_0 se numeşte zerou de ordin k pentru f.

În particular, dacă $f(z_0) = 0$, atunci z_0 este zerou al funcţiei f.

Pentru funcţii olomorfe neidentic nule pe un domeniu are loc Teorema zerourilor unei funcţii olomorfe.

Teorema 1.1.59. *Fie* $A \subseteq \mathbb{C}$ *un domeniu şi* $f : A \to \mathbb{C}$ *astfel încât* $f \in \mathcal{H}(A)$ *şi* f *nu este identic nulă. Dacă* $z_0 \in A$ *este un zerou al funcţiei* f*, atunci există* $r = r(z_0) > 0$ *astfel încât*

$$U(z_0; r) \subset A \text{ şi } f(z) \neq 0 \text{ pentru orice } z \in \dot{U}(z_0; r).$$

Un alt rezultat util este o particularizare a Teoremei identităţii funcţiilor olomorfe:

Teorema 1.1.60. *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $f : A \to \mathbb{C}$ astfel încât $f \in \mathcal{H}(A)$. Următoarele proprietăţi sunt echivalente:*

(i) $f \equiv 0$

(ii) Există un punct $x_0 \in A$ astfel încât $f^{(n)}(x_0) = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

(iii) Mulţimea $\{z \in A \mid f(z) = 0\}$ are cel puţin un punct de acumulare.

1.2 Integrala complexă

În continuare vom prezenta noţiunea de integrală complexă (Cauchy) şi câteva rezultate fundamentale ce caracterizează această noţiune.

Definiţia 1.2.1. O funcţie $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ continuă se numeşte drum.

Imaginea funcţiei, $\gamma([0,1])$, se notează cu $\{\gamma\}$ şi se numeşte suportul drumului γ.

Dacă $\gamma(0) = \gamma(1)$, atunci drumul γ este închis. Un exemplu de astfel de drum este

$$\gamma(z) = 0z_0 + re^{2\pi it},$$

care parcurge de fapt $\partial U(z_0; r)$. Notăm cu $\mathcal{D}(z_1, z_2)$ mulţimea drumurilor din $\mathbb{C}$ cu punctul iniţial în z_1 şi punctul final în z_2 şi cu $\mathcal{D}_G(z_1, z_2)$ mulţimea drumurilor din G cu punctul iniţial în z_1 şi punctul final în z_2.

Se numeşte deformaţie continuă a drumului $\gamma_1 : [0,1] \to G$ în drumului $\gamma_2 : [0,1] \to G$ o aplicaţie continuă $\varphi : [0,1] \times [0,1] \to G$ astfel încât

$$\varphi(0,t) = \gamma_1(t) \quad \text{şi} \quad \varphi(1,t) = \gamma_2(t),\ t \in [0,1].$$

Observăm că fiecare $s \in [0,1]$ defineşte astfel un drum

$$\gamma_s : [0,1] \to G, \quad \gamma_s(t) = \varphi(s,t).$$

Drumul $\gamma_1 : [0,1] \to G$ este omotop cu drumul $\gamma_2 : [0,1] \to G$ dacă există o deformaţie continuă în G a lui γ_1 în γ_2. În acest caz notăm $\gamma_1 \underset{G}{\sim} \gamma_2$. Dacă $\gamma_1 \in$

$\mathcal{D}(z_1, z_2)$ şi $\gamma_2 \in \mathcal{D}(z_2, z_3)$ atunci compunerea drumului γ_1 cu drumul γ_2 va fi un drum notat $\gamma_1 \cup \gamma_2 \in \mathcal{D}(z_1, z_3)$ definit prin:

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ \gamma_2(2t-1), & t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

În general pentru n drumuri avem $\gamma_j \in \mathcal{D}(a_j, a_{j+1})$, $j = \overline{1, n}$ cu $a_j \in \mathbb{C}$

$$(\gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n)(t) = \begin{cases} \gamma_1(nt), & t \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ \gamma_2(nt-1), & t \in \left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right] \\ \ldots \\ \gamma_k(nt-k), & t \in \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right] \\ \ldots \\ \gamma_n(nt-(n-1)), & t \in \left[\dfrac{n-1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Fie γ un drum şi $A = (t_0 = 0, t_1, \ldots, t_n = 1)$ o diviziune a intervalului $[0, 1]$. Atunci sistemul de drumuri $(\gamma - 0, \ldots, \gamma_{n-1})$ este o descompunere a lui γ asociată diviziunii Δ dacă $\gamma_k = \gamma \circ h_k$, $\forall\, k = \overline{1, n}$, unde

$$h_k : [0, 1] \to [t_{k-1}, t_k], \quad h_k(t) = t_{k-1} + t(t_k - t_{k-1}).$$

Dacă $\gamma \in \mathcal{D}_G(z_1, z_2)$, atunci inversul drumului γ se notează cu γ^- şi este definit prin $\gamma^-(t) = \gamma(1-t)$. Observăm că drumurile γ şi γ^- au acelaşi suport, dar sensuri de parcurgere opuse.

Definiţia 1.2.2. Pentru orice $z \in G$ notăm cu e_z drumul definit prin $e_z(t) = z$.

Un drum $\gamma \in \mathcal{D}_G(z, z)$ se numeşte omotop cu zero în G dacă $\gamma \underset{G}{\sim} e_z$. Drumul $\gamma \in \mathcal{D}(z_1, z_2)$ definit prin $\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$ se numeşte drum liniar.

Un drum γ pentru care există o descompunere formată din drumuri liniare se numeşte drum poligonal.

O mulţime A se numeşte poligonal convexă dacă pentru orice $z_1, z_2 \in A$ există un drum poligonal $\gamma \in \mathcal{D}(z_1, z_2)$ cu $\{\gamma\} \subset A$.

Un domeniu D se numeşte simplu conex dacă orice drum din D care este închis este de asemenea omotop cu zero în D.

Definiţia 1.2.3. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ şi $\Delta = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ o diviziune a lui $[a,b]$.

Notăm cu $\|\Delta\| = \max\{t_k - t_{k-1} \mid k = \overline{1,n}\}$.

Variaţia pe Δ a lui f este

$$V(f,\Delta) = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|.$$

Variaţia totală a lui f pe $[a,b]$ va fi

$$V(f,[a,b]) = \sup_{\Delta \in Div[a,b]} V(f,\delta)$$

unde $Div[a,b]$ este mulţimea diviziunilor lui $[a,b]$.

Dacă variaţia totală a lui f pe $[a,b]$ este finită, atunci spunem că f este cu variaţie mărginită. Un drum γ care este cu variaţie mărginită se numeşte drum rectificabil, iar variaţia totală a drumului se numeşte lungimea drumului şi se notează cu $V(\gamma)$.

Un drum rectificabil şi închis se numeşte contur.

Un drum γ se numeşte neted dacă γ este o funcţie derivabilă cu derivata continuă pe $[0,1]$.

Drumul γ este parţial neted dacă există $\Delta = (t_0, t_1, \ldots, t_n) \in Div[0,1]$ cu proprietatea că $\gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$ este un drum neted pentru orice $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Un contur γ se numeşte simplu dacă $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ pentru $t_1, t_2 \in (0,1)$, adică este injectiv pe $(0,1)$.

Propoziţia 1.2.4. Fie $G \subseteq \mathbb{C}$, γ un drum în G şi $\Delta \in Div[0,1]$.

Dacă $(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1})$ este o descompunere a drumului γ asociată diviziunii Δ, atunci

$$\gamma \underset{G}{\sim} \gamma_0 \cup \ldots \cup \gamma_{n-1}.$$

Definiţia 1.2.5. Dacă $G \subseteq \mathbb{C}$ este un domeniu şi $a \in G$, iar $[a,z] \subset G$, $\forall\, z \in G$, atunci spunem că G este stelat în raport cu a.

Domeniul G este stelat dacă $\exists\, a \in G$ astfel încât G este stelat în raport cu a.

Un domeniu din $\mathbb{C}$ este convex dacă el este stelat în raport cu orice punct al său.

Observaţia 1.2.6. Orice domeniu stelat din $\mathbb{C}$ este simplu conex. Deci orice domeniu convex este şi simplu conex.

Exemplul 1.2.7. $U(z_0; r)$ este domeniu simplu conex.

$\dot{U}(z_0; r)$ nu este simplu conex.

$U(z_0; r_1, r_2)$ nu este simplu conex.

Definiţia 1.2.8. Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ astfel încât $\operatorname{Re} f$ şi $\operatorname{Im} f$ sunt integrabile pe $[a, b]$ atât în raport cu $\operatorname{Re} g$, cât şi în raport cu $\operatorname{Im} g$. Atunci spunem că f este integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ (în sens Riemann-Stieltjes).

Dacă $f = u + iv$ şi $g = U + iV$, atunci definim integrala funcţiei f în raport cu g pe $[a, b]$ prin:

$$\int_a^b f dg = \int_a^b udU - \int_a^b vdV + i\int_a^b udV + i\int_a^b vdV.$$

Definiţia 1.2.9. Fie γ un drum rectificabil în $\mathbb{C}$ şi $f : \{\gamma\} \to \mathbb{C}$ continuă. Atunci definim integrala complexă (Cauchy) a funcţiei f pe drumul γ astfel:

$$\int_\gamma f = \int_0^1 (f \circ \gamma)(t) d\gamma(t).$$

Ca şi notaţie putem întâlni şi $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$.

Observaţia 1.2.10. Dacă γ este un drum neted, atunci

$$\int_\gamma f = \int_0^1 (f \circ \gamma)(t)\gamma'(t)dt.$$

În cele ce urmează vom prezenta câteva proprietăţi generale ale integralei complexe.

Proprietatea 1.2.11. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathcal{D}(z_1, z_2)$, $f : \{\gamma\} \to \mathbb{C}$, $g : \{\gamma\} \to \mathbb{C}$, f şi g funcţii continue. Atunci au loc următoarele relaţii:

(i) $\displaystyle\int_\gamma \alpha f + \beta g = \alpha\int_\gamma f + \beta\int_\gamma g,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

(ii) $\displaystyle\int_{\gamma^-} f = -\int_\gamma f$

(iii) $\displaystyle\int_{\gamma\cup\lambda} f = \int_\gamma f + \int_\lambda f$, unde $z_3 \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathcal{D}(z_2, z_3)$

(iv) $\displaystyle\int_\gamma f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} f$, unde $\Delta \in Div[0,1]$ şi $(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1})$ este o descompunere a drumului γ asociată diviziunii Δ

(v) $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq l(\gamma) \sup_{z\in\{\gamma\}} |f(z)|$.

Definiţia 1.2.12. Fie $f, g : A \to \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$. Dacă $g \in \mathcal{H}(A)$ şi $g'(z) = f(z)$ pentru orice $z \in A$, atunci g este o primitivă a lui f pe A.

Teorema de legătură dintre primitivă şi integrală 1.2.13. *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $f : A \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă. Atunci au loc următoarele afirmaţii:*

(i) Dacă $\displaystyle\int_\gamma f = 0$ pentru orice contur γ din A, atunci f admite primitive pe A.

(ii) Dacă f admite o primitivă g pe A, iar γ este un drum rectificabil din A, atunci

$$\int_\gamma f = (g \circ \gamma)(1) - (g \circ \gamma)(0).$$

Observaţia 1.2.14. Din teorema precedentă deducem că o funcţie continuă f pe un domeniu $A \subseteq \mathbb{C}$ admite primitive pe A dacă şi numai dacă $\displaystyle\int_\gamma f = 0$, pentru orice contur γ a cărui suport este inclus în A.

Observaţia 1.2.15. Există funcţii continue pe mulţimi deschise din $\mathbb{C}$ care nu admit primitive, cum ar fi $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Deoarece

$$\int_{\partial U(0,1)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0,$$

rezultă din Observaţia 1.2.14 că f nu admite primitive pe $\mathbb{C}^*$.

Totuşi f admite primitive pe $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ sau pe $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

Un alt rezultat fundamental în studiul integralei complexe este teorema de legătură dintre olomorfie şi primitivă.

Teorema 1.2.15. *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu stelat în raport cu $a \in A$ şi $a_1, \ldots, a_k \in \Omega$. Dacă $f : A \to \mathbb{C}$ este o funcţie continuă pe A şi derivabilă pe $A \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$, atunci f admite primitive pe A.*

Teorema lui Morera 1.2.16. *Fie $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$ deschisă. Dacă f admite primitive pe A, atunci f este olomorfă pe A.*

În continuare prezentăm teorema fundamentală a lui Cauchy.

Teorema 1.2.17. *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Dacă γ este un contur în A omotop cu zero, atunci*

$$\int_\gamma f = 0.$$

În particular dacă $z_1, z_2 \in A$ şi $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{D}_A(z_1, z_2)$ astfel încât $\gamma_1 \underset{A}{\sim} \gamma_2$, atunci

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

Observaţia 1.2.18. Din Teorema 1.2.13 şi Teorema 1.2.17 obţinem că dacă $A \subseteq \mathbb{C}$ este un domeniu simplu conex şi $f \in \mathcal{H}(A)$, atunci f admite primitive pe A.

Teorema 1.2.19. *Fie $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $f : \overline{U}(a;r) \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe $U(a;r)$ şi continuă pe $\overline{U}(a;r)$. Atunci f este nelimitat derivabilă pe $U(a;r)$ şi au loc următoarele relaţii:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U(a;r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in U(a;r)$$

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial U(a;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, \quad z \in U(a;r),\ k \in \mathbb{N}.$$

Observaţia 1.2.20. Teorema anterioară prezintă formulele lui Cauchy pentru disc. Din aceste formule putem deduce că dacă pentru o funcţie olomorfă pe un disc şi continuă pe închiderea discului se cunosc valorile ei pe frontiera discului, atunci valorile funcţiei sunt determinate şi în restul discului.

Corolar 1.2.21. *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f \in \mathcal{H}(A)$. Atunci f este nelimitat derivabilă pe A, deci există $f^{(n)} \in \mathcal{H}(A)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

Corolar 1.2.22. *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $\overline{U}(z_0;r) \subset A$ şi $f \in \mathcal{H}(A)$. Atunci au loc inegalităţile lui Cauchy:*

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!M}{r^k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

unde $M = \max\{|f(z)| \mid z \in \overline{U}(z_0;r)\}$.

Teorema 1.2.23. *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ deschisă şi n puncte din mulţime $z_j \in A$, $j = \overline{1,n}$. Dacă $f : A \to \mathbb{C}$ este derivabilă pe $A \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ şi continuă pe A, atunci f este olomorfă pe A.*

Î n continuare vom introduce noţiuneade serie Laurent şi câteva rezultate principale referitoare la această noţiune.

Definiţia 1.2.24. Fie $a \in \mathbb{C}$. Seria Laurent este o serie de funcţii de forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k = \ldots + \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \ldots + c_k(z-a)^k + \ldots$$

Seria Laurent este compusă din partea sa principală $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k$ şi din partea sa tayloriană $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$.

Teorema 1.2.25. *Fie seria Laurent* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k$ *şi notăm cu:*

$$r = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} \quad \text{şi} \quad \frac{1}{\rho} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}.$$

Dacă $r < \rho$*, atunci seria converge uniform pe compacte, este absolut convergentă în* $U(a;r,\rho)$ *şi este divergentă pe* $\mathbb{C} \setminus \overline{U}(a;r,\rho)$*.*

Observaţia 1.2.26. Fie r, ρ şi $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k$ definite în rezultatul precedent. Dacă $r < \rho$, atunci $f \in \mathcal{H}(U(a;r,\rho))$, unde

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k, \quad z \in U(a;r,\rho).$$

Teorema dezvoltării în serie 1.2.27. *Fie* $z_0 \in \mathbb{C}$ *şi* $0 < r_1 < r_2$*. Dacă* $f : U(z_0;r_1,r_2) \to \mathbb{C}$ *este olomorfă, atunci* f *se poate dezvolta în serie Laurent, iar coeficienţii* c_k *sunt unici astfel încât*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k, \quad z \in U(z_0;r_1,r_2).$$

Prezentăm în continuare, pe scurt, noţiunea de ramură uniformă şi câteva teoreme legate de această noţiune.

Definiţia 1.2.28. Fie $A, B \subseteq \mathbb{C}$, A mulţime deschisă astfel încât $A \subseteq B$. Fie $F : B \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ o aplicaţie multivocă. Funcţia $f : A \to \mathbb{C}$ se numeşte ramură uniformă a lui F pe A dacă $f \in \mathcal{H}(A)$ şi $f(z) \in F(z)$, $\forall\, z \in A$.

Exemplul 1.2.29. Fie aplicaţia multivocă logaritm Log : $\mathbb{C}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Alegem $A = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0,\ \operatorname{Im} z = 0\}$ care este o mulţime deschisă, $A \subseteq \mathbb{C}^*$ (de fapt, A este un domeniu simplu conex în $\mathbb{C}$).

Atunci funcţia $f : A \to \mathbb{C}$, $f(z) = \log z = \ln |z| + i\theta(z)$, unde $\theta(z) \in \operatorname{Arg} z \cap (0, 2\pi)$, este o ramură uniformă a aplicaţiei multivoce logaritm pe A.

Teoremele ce urmează ne arată că pe domenii simplu conexe există şi sunt unice ramurile uniforme corespunzătoare aplicaţiilor multivoce logaritm şi putere, dacă fixăm o valoare iniţială.

Teorema 1.2.30. *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi $g : A \to \mathbb{C}$, $g \in \mathcal{H}(A)$ astfel încât $g(z) \neq 0$, $\forall\ z \in A$. Fie $z_0 \in A$ şi $w_0 \in \operatorname{Log}(g(z_0))$. Atunci există o unică ramură uniformă f a lui* Log $\circ\, g$ *pe A astfel încât $f(z_0) = w_0$.*

Teorema 1.2.31. *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi $g : A \to \mathbb{C}$, $g \in \mathcal{H}(A)$ astfel încât $g(z) \neq 0$, $\forall\ z \in A$. Fie $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $z_0 \in A$ şi $w_0 \in [g(z_0)]^\alpha$. Atunci există o unică ramură uniformă f a lui g^α pe A astfel încât $f(z_0) = w_0$.*

În cele ce urmează vom introduce noţiunea de index şi câteva rezultate referitoare la această noţiune.

Definiţia 1.2.32. Fie γ un contur din $\mathbb{C}$ şi un punct $z \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$. Atunci indexul conturului γ în raport cu z se notează cu $n(\gamma; z)$ şi este definit prin relaţia

$$n(\gamma; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Exemplul 1.2.33. Pentru conturul $\gamma(t) = z_0 + re^{6\pi i t}$, $t \in [0, 1]$ avem $b(\gamma; z_0) = 3$.

Intuitiv, observăm că indexul ne arată de câte ori γ ocoleşte punctul z_0, deoarece $z_0 \in \{\gamma\}$.

Lema 1.2.34. *Pentru două contururi γ_1 şi γ_2 din $\mathbb{C}$ au loc următoarele proprietăţi:*

(i) $n(\gamma_1^-, z) = -n(\gamma_1, z),\ \forall\ z \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma_1\}$

(ii) Dacă $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, atunci

$$n(\gamma_1 \cup \gamma_2; z) = n(\gamma_1; z) + n(\gamma_2; z),\ \forall\ z \in \mathbb{C} \setminus (\{\gamma_1\} \cup \{\gamma_2\}).$$

(iii) Dacă γ_1 şi γ_2 sunt omotope şi $z \in \mathbb{C} \setminus (\{\gamma_1\} \cup \{\gamma_2\})$, atunci

$$n(\gamma_1; z) = n(\gamma_2; z).$$

Teorema 1.2.35. *Fie γ un contur în $\mathbb{C}$. Dacă $z \in \mathbb{C}\setminus\{\gamma\}$ este un punct oarecare atunci $n(\gamma; z) \in \mathbb{Z}$. De asemenea, $n(\gamma, \cdot)$ este o funcţie constantă pe fiecare componentă conexă a lui $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$. În plus, pentru orice punct z din componenta conexă nemărginită a lui $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ avem că $n(\gamma; z) = 0$.*

În cele ce urmează prezentăm o extindere a formulelor lui Cauchy pentru disc, stabilind în mod asemănător o formulă pentru integrala pe un contur omotop cu zero. Aceste rezultate se numesc formulele lui Cauchy pentru contururi.

Teorema 1.2.36. *Fie $A \subseteq \mathbb{C}_0$ o mulţime deschisă şi $f \in \mathcal{H}(A)$. Dacă γ este omotop cu zero în A, atunci are loc relaţia:*

$$n(\gamma; z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, \quad z \in A \setminus \{\gamma\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Introducem în cele ce urmează câteva noţiuni legate de puncte izolate.

Definiţia 1.2.37. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f \in \mathcal{H}(A)$. Punctul $z_0 \in \mathbb{C}$ se numeşte singular izolat pentru funcţia f dacă $z_0 \notin A$ şi există $r > 0$ astfel încât $\dot{U}(z_0; r) \subseteq A$.

Exemplu de funcţii cu puncte singulare izolate sunt $\dfrac{1}{z}$ sau $\dfrac{\sin z}{z}$.

Definiţia 1.2.38. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $f \in \mathcal{H}(A)$ şi z_0 un punct singular izolat al funcţiei. Atunci

(i) z_0 este eliminabil dacă f se extinde olomorf la $A \cup \{z_0\}$.

(ii) z_0 este pol dacă $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

(iii) z_0 este esenţial izolat dacă nu există limita funcţiei f în z_0.

(iv) z_0 este regular pentru funcţia f dacă z_0 este eliminabil pentru f sau f este derivabilă în z_0.

Prezentăm în cele ce urmează câteva caracterizări ale diferitelor tipuri de puncte singular izolate.

Lema 1.2.39. *Dacă $A \subseteq \mathbb{C}$ deschisă, $f \in \mathcal{H}(A)$ şi z_0 este un punct singular izolat a lui f, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) z_0 *este eliminabil*

(ii) $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

(iii) Partea principală a seriei Laurent în punctul z_0 *nu are nici un termen.*

Definiţia 1.2.40. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă. Funcţia $f : A \to \mathbb{C}$ se numeşte meromorfă, dacă există $B \subset A$ fără puncte de acumulare în A astfel încât $f \in \mathcal{H}(A \setminus B)$, iar B conţine doar puncte eliminabile sau poli pentru f.

Observaţia 1.2.41. Dacă $A \subseteq \mathbb{C}_\infty$ deschisă şi $\infty \in A$, atunci f este meromorfă pe A dacă f este meromorfă pe $A \cap \mathbb{C}$, ∞ fiind punct eliminabil sau pol pentru funcţia f.

Dacă f este meromorfă pe A, notăm $f \in \mathcal{M}(A)$.

Definiţia 1.2.42. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ deschisă, $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $f \in \mathcal{M}(A)$ cu proprietatea că f nu e funcţia nulă pe nici o componentă conexă a lui A.

Fie $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei f în z_0.

Definim şi notăm ordinul lui f în z_0 prin:

$$ord(f; z_0) = inf\{k \in \mathbb{Z} \mid c_k \neq 0\}.$$

Dacă $f \equiv 0$, atunci $ord(f; z_0) = \infty$.

Teorema 1.2.44. *Fie* $A \subseteq \mathbb{C}$ *deschisă,* $f \in \mathcal{M}(A)$ *cu proprietatea că* f *nu este funcţia nulă pe nici o componentă conexă a lui* A *şi* $g \in \mathcal{H}(A)$*. Dacă* γ *este un contur omotop cu zero în* A *care nu trece nici prin zerourile, nici prin polii funcţiei* f*, atunci suma*

$$\sum_{z \in Z_f \cup P_f} g(z) n(\gamma; z) ord(f; z)$$

este finită, unde Z_f *este mulţimea zerourilor lui* f*, iar* P_f *este mulţimea polilor lui* f*, şi are loc relaţia:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} g(z) dz = \sum_{z \in Z_f \cup P_f} g(z) n(\gamma; z) ord(f; z).$$

Un caz particular al acestei teoreme este teorema lui Cauchy relativă la zerouri şi poli.

Corolar 1.2.45. *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ deschisă, $f \in \mathcal{M}(A)$ care nu e identic nulă pe nici o componentă conexă a lui A şi fie γ un contur omotop cu zero în A care nu trece prin zerourile şi polii funcţiei f. Atunci are loc relaţia*

$$n(f \circ \gamma; 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z \in Z_f \cup P_f} ord(f; z) n(\gamma; z),$$

unde Z_f este mulţimea zerourilor lui f, iar P_f este mulţimea polilor lui f pe A.

În finalul acestui subcapitol prezentăm o variantă particulară a teoremei lui Rouché.

Teorema 1.2.46. *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ deschisă, funcţiile $f, g \in \mathcal{H}(A)$, D un disc astfel încât $\overline{D} \subset A$ şi notăm cu $\gamma = \partial D$. Dacă are loc relaţia:*

$$|g(z)| < |f(z)|, \ \forall \ z \in \gamma$$

atunci

$$N_0(f + g) = N_0(f),$$

unde $N_0(f)$ (respectiv $N_0(f+g)$) este numărul zerourilor funcţiei f (respectiv $f+g$) pe D.

1.3 Reprezentarea conformă

În cele ce urmează vom prezenta noţiunile de funcţie univalentă şi reprezentare conformă.

1.3.1 Funcţii univalente. Proprietăţi generale

La începutul acestui subcapitol introducem noţiunea de funcţie univalentă.

Definiţia 1.3.1.1. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ domeniu şi $f : A \to \mathbb{C}$. Funcţia f se numeşte univalentă pe A dacă f este olomorfă şi injectivă pe A.

Notăm mulţimea funcţiilor univalente pe A cu $\mathcal{H}_u(A)$.

Exemplul 1.3.1.2. Fie mulţimea $E = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ şi funcţia $f : E \to \mathbb{C}$ definită prin $f(z) = z^2$. Se observă că funcţia f dublează argumentul variabilei complexe, deci cum E reprezintă semiplanul drept, vom avea că $w = f(z)$ are $|\arg w| < \pi$. Evident $f \in \mathcal{H}_u(E)$ şi $f(E) = \mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w \leq 0,\ \operatorname{Im} w = 0\}$.

Exemplul 1.3.1.3. Funcţia lui Koebe definită prin $f : U \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

este univalentă pe U. Observăm că numitorul nu se anulează în discul unitate (se anulează doar pe frontieră), deci f este olomorfă pe U.

Prima metodă de a arăta că f este şi injectivă este următoarea.

Presupunem că $f(z_1) = f(z_2)$, $z_1, z_2 \in U$. Atunci avem că

$$\frac{z_1}{(1-z_1)^2} = \frac{z_2}{(1-z_2)^2},$$

adică

$$z_1 + z_1 z_2^2 - 2z_1 z_2 = z_2 + z_1^2 z_2 - 2z_1 z_2.$$

Obţinem că $(z_1 - z_2)(1 - z_1 z_2) = 0$.

Dar $z_1, z_2 \in U$, deci $|z_1| < 1$ şi $|z_2| < 1$. Astfel avem că $z_1 z_2 \neq 1$, deci $z_1 = z_2$ şi f este injectivă.

O altă metodă de a arăta că f este univalentă, este cu ajutorul Teoremei lui Kaplan (Teorema 1.3.1.13).

Fie funcţia

$$g(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+z}{1-z}.$$

Atunci

$$g'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{şi} \quad g \in \mathcal{H}_u(U).$$

Avem că

$$f'(z) = \frac{(1-z)^2 + 2z(1-z)}{(1-z)^4} = \frac{1-z+2z}{(1-z)^3} = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

Deci

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{1+z}{(1-z)^3} \cdot (1-z)^2 = \frac{1+z}{1-z}$$

Prin calcul reiese imediat că $\operatorname{Re} \dfrac{1+z}{1-z} > 0$.

Atunci din Teorema 1.3.1.13 rezultă că $f \in \mathcal{H}_u(U)$.

Funcţia lui Koebe se poate scrie ca şi compunere de funcţii astfel:

$$f = z_3 \circ z_2 \circ z_1 \text{ pe } U,$$

unde

$$z_1(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad z_2(z) = z^2 \quad \text{şi} \quad z_3(z) = \frac{1}{4}(z-1).$$

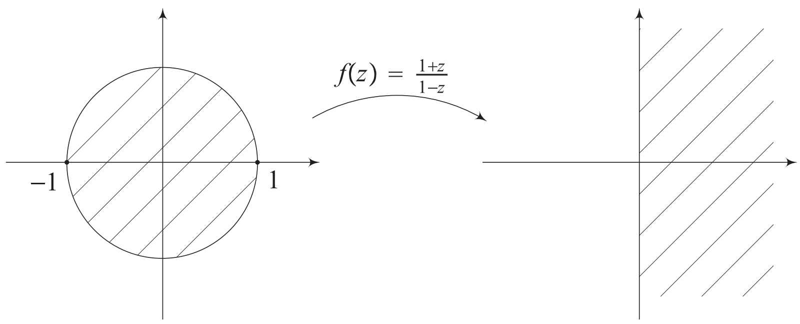
Ştim că z_1 este univalentă pe U şi transformă discul unitate în semiplanul drept, adică $z_1(U) = E$, unde $E = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$. De asemenea, $z_2 \in \mathcal{H}_u(E)$ şi $z_2(E) = \mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w \leq 0,\ \operatorname{Im} w = 0\}$ din exemplul 1.3.1.2.

Cea de-a treia funcţie z_3 este univalentă pe $\mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w \leq 0,\ \operatorname{Im} w = 0\}$ şi obţinem

$$z_3(z_2(z_1(U))) = \mathbb{C} \setminus \left\{ w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w \leq -\frac{1}{4},\ \operatorname{Im} w = 0 \right\}.$$

În concluzie funcţia lui Koebe transformă discul unitate în

$$\mathbb{C} \setminus \left\{ w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w \leq -\frac{1}{4},\ \operatorname{Im} w = 0 \right\}.$$



Fie acum funcţia $f_\theta(z) = \dfrac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2}$.

Avem că

$$f_\theta(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2} = e^{-i\theta} \cdot \frac{e^{i\theta} z}{(1 - e^{i\theta} z)^2} = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z), \quad z \in U,$$

deci f_θ este o rotaţie de unghi $-\theta$ a funcţiei f şi $f_\theta \in \mathcal{H}_u(U)$.

Exemplul 1.3.1.4. Funcţia exponenţială $g(z) = e^z$ este univalentă pe banda

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

şi transformă această bandă în $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Observăm că în general funcţia exponenţială nu este univalentă, fiind periodică.

Observaţia 1.3.1.5. Suma a două funcţii univalente nu este de obicei univalentă, dar compunerea a două funcţii univalente rămâne o funcţie univalentă.

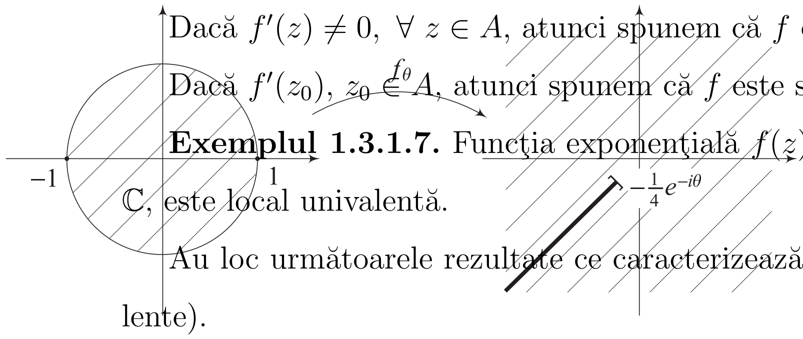
Definiţia 1.3.1.6. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Spunem că funcţia f este local univalentă pe A dacă pentru orice punct din A, $z \in A$, există un disc centrat în acel punct inclus în A, $U(z; r) \subseteq A$, astfel încât restricţia lui f la $U(z; r)$ e bijectivă, olomorfă şi cu inversa olomorfă.

Dacă $f'(z) \neq 0$, $\forall\ z \in A$, atunci spunem că f este nesingulară pe A.

Dacă $f'(z_0)$, $z_0 \in A$, atunci spunem că f este singulară în z_0.

Exemplul 1.3.1.7. Funcţia exponenţială $f(z) = e^z$, deşi nu este univalentă pe $\mathbb{C}$, este local univalentă.

Au loc următoarele rezultate ce caracterizează funcţiile univalente (local univalente).



Teorema 1.3.1.8. *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Atunci f este local univalentă pe A dacă şi numai dacă f este nesingulară.*

Teorema 1.3.1.9. *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi $f \in \mathcal{H}_u(A)$.*

Atunci $f'(z) \neq 0, \ \forall \ z \in A$, adică f este nesingulară pe A.

Următoarea teoremă se referă la faptul că printr-o funcţie univalentă se conservă noţiunea de simplu conexitate.

Teorema 1.3.1.10. *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi $f \in \mathcal{H}_u(A)$. Dacă notăm $B = f(A)$, atunci B este domeniu simplu conex.*

Varianta a doua a teoremei lui Hurwitz prezentată în paragraful 1.1, Corolarul 1.1.56, se poate reformula cu noţiunea de funcţie univalentă astfel:

Teorema 1.3.1.11. *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ domeniu şi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ şir de funcţii univalente pe A care converge uniform pe compacte în A la f. Atunci f este constantă sau univalentă pe A.*

Următoarele două teoreme pun în evidenţă condiţii suficiente de univalenţă.

Teorema 1.3.1.12. (Teorema lui Alexander) *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ domeniu convex şi $f \in \mathcal{H}(A)$.*

Dacă $\operatorname{Re} f'(z) > 0, \forall \ z \in A$, *atunci $f \in \mathcal{H}_u(A)$.*

Teorema 1.3.1.13. (Teorema lui Kaplan) *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ domeniu, $f \in \mathcal{H}(A)$ şi $g \in \mathcal{H}_u(A)$ astfel încât $g(A)$ este domeniu convex. Dacă*

$$\operatorname{Re}\left[f'(z)/g'(z)\right] > 0, \ \forall \ z \in A,$$

atunci $f \in \mathcal{H}_u(A)$.

1.3.2 Reprezentarea conformă în planul complex

În cele ce urmează introducem noţiunea de reprezentare conformă.

Definiţia 1.3.2.1. Fie $A, B \subseteq \mathbb{C}$ domenii şi $f : A \to B$. Funcţia f se numeşte reprezentare conformă dacă $f \in \mathcal{H}_u(A)$ şi $f(A) = B$.

Domeniile A şi B se numesc în aceste condiţii conform echivalente.

Dacă $A = B$, atunci f se numeşte automorfism conform al domeniului A.

Notăm cu $Aut(A)$ mulţimea automorfismelor lui A.

Teorema 1.3.2.2. *Fie $A, B \subset \mathbb{C}$ domenii astfel încât A este simple conex şi A este conform echivalent cu B. Atunci B este un domeniu simplu conex.*

Observaţia 1.3.2.3. Această teoremă este o implicaţie directă a Teoremei 1.3.9 dacă alegem f reprezentarea conformă între cele două domenii.

Deducem deci că un domeniu simplu conex nu poate fi conform echivalent cu un domeniu multiplu conex.

Observaţia 1.3.2.4. $\mathbb{C}$ şi discul unitate sunt omeomorfe, dar nu sunt conform echivalente. În sprijinul acestei afirmaţii avem că $f : \mathbb{C} \to \infty$,

$$f(z) = \frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

este un omeomorfism al lui $\mathbb{C}$ pe U. Presupunem acum că $\mathbb{C}$ şi U sunt conform echivalente, deci există o reprezentare conformă $g : C \to U$. Rezultă că $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ şi din $g(\mathbb{C}) = U$ rezultă că g este mărginită. Din Teorema lui Liouville obţinem că g este constantă, ceea ce conduce la o contradicţie. Deci $\mathbb{C}$ şi U sunt conform echivalente.

Observaţia 1.3.2.5. Dacă $f : A \to B$ este o reprezentare conformă a domeniului A pe domeniul B, atunci f^{-1} este o reprezentare conformă a lui B pe A.

Observaţia 1.3.2.6. Dacă $f : A \to B$ este o reprezentare conformă a domeniului A pe domeniul B, atunci orice altă reprezentare conformă de la A la B se reprezintă ca şi $g = h \circ f$, unde $h \in Aut(B)$.

Exemplul 1.3.2.7. Discul unitate U şi semiplanul $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ sunt domenii conform echivalente. O reprezentare conformă între aceste două domenii este funcţia

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

Următoarea teoremă este un rezultat central relativ la reprezentările conforme.

Teorema 1.3.2.8. (Teorema lui Riemann) *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex cu $A \neq \mathbb{C}$. Atunci A şi discul unitate U sunt conform echivalente.*

Următoarea teoremă ne dă forma automorfismelor discului unitate.

Teorema 1.3.2.9. *Fie $f : U \to \mathbb{C}$. Atunci f este automorfism conform al discului unitate dacă şi numai dacă există $a \in U$ şi $\theta \in \mathbb{R}$ astfel încât*

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \quad z \in U.$$

Observaţia 1.3.2.10. Notăm cu Π următorul semiplan:

$$\Pi = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Notăm cu B_Π mulţimea reprezentărilor conforme ale lui Π pe discul unitate U.

Teorema 1.3.2.11. *Cu notaţiile din observaţia anterioară avem că*

$$B_\Pi = \left\{ \varphi_{a,\theta} : \Pi \to U \mid \varphi_{a,\theta}(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z-a}{z-\overline{a}},\ z \in \Pi,\ \theta \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} a > 0 \right\}.$$

Teorema următoare ne dă forma automorfismelor semiplanului superior.

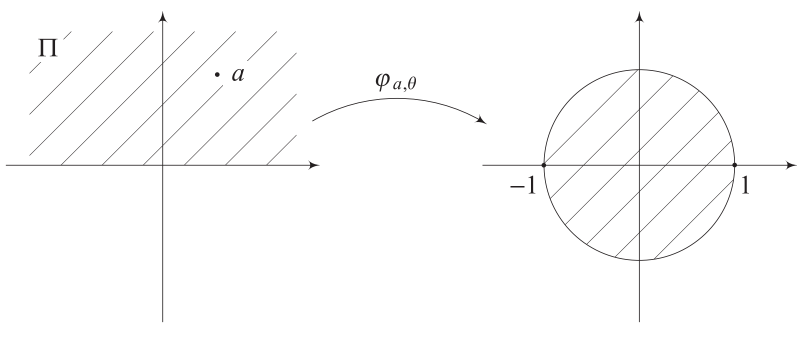
Teorema 1.3.2.12.

$$Aut(\Pi) = \left\{ f : \Pi \to \Pi \mid f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ z \in \Pi,\ a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc > 0 \right\}.$$

Prezentăm în cele ce urmează o teoremă care ne dă forma automorfismelor planului complex $\mathbb{C}$.

Teorema 1.3.2.13.

$$Aut(\mathbb{C}) = \{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f(z) = az+b,\ z \in \mathbb{C},\ a,b \in \mathbb{C},\ a \neq 0 \}.$$



Capitolul 2

Funcţii univalente şi lanţuri de subordonare diferenţială

În acest capitol vom studia noţiunea de funcţie univalentă şi ne vom referi la unele rezultate generale referitoare la această noţiune. În acest sens, vom prezenta condiţii necesare şi condiţii suficiente de univalenţă şi vom studia clasa S a funcţiilor normate univalente pe discul unitate. De asemenea, vor fi prezentate subclase importante ale clasei S, formate din funcţiile stelate, convexe şi spiralate pe discul unitate. În finalul acestui capitol vom introduce câteva rezultate fundamentale din teoria lanţurilor de subordonare diferenţială.

Sursele principale bibliografice pe care le-am utilizat în alcătuirea acestui capitol sunt [KM], [MBS], [GK]. De asemenea, au fost utile [Co], [RR], [Po].

2.1 Clasa S

În cele ce urmează ne vom referi la clasa S a funcţiilor normate univalente pe discul unitate U.

2.1.1 Proprietăţile generale ale clasei S

Definiţia 2.1.1.1. S este o clasă specială de funcţii univalente pe discul unitate care îndeplinesc condiţiile $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 1$. Deci expresia clasei S va fi:

$$S = \{f \in \mathcal{H}_u(U) \mid f(0) = 0,\ f'(0) = 1\}.$$

Reamintim faptul că $\mathcal{H}_u(U)$ reprezintă clasa funcţiilor univalente pe discul unitate U.

Exemplul 2.1.1.2. Funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = az^2 + z$ este univalentă pe U cu

$$f'(z) = 2az + 1.$$

Avem că $f'(0) = 1$ şi $f(0) = 0$, deci $f \in S$.

Exemplul 2.1.1.3. Funcţia $f : U \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ este univalentă pe U cu

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Avem că $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 1$, deci $f \in S$.

Proprietatea 2.1.1.4. Orice funcţie $f \in S$ admite o dezvoltare în serie de puteri de forma

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in U.$$

Notaţie 2.1.1.5. Fie Γ exteriorul discului unitate, adică

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}_\infty \mid |z| > 1\}.$$

Reamintim că o funcţie $f : A \to \mathbb{C}$, A – mulţime deschisă, se numeşte meromorfă dacă există $B \subset A$ fără puncte de acumulare în A astfel încât $f \in \mathcal{H}(A \setminus B)$, iar B conţine doar puncte eliminabile sau poli pentru f.

În aceste condiţii, notăm cu Σ clasa funcţiilor $f : \Gamma \to \mathbb{C}_\infty$ care sunt mermorfe şi injective pe Γ cu unicul pol simplu $z = \infty$ şi care se pot dezvolta în serie Laurent la ∞ sub forma:

$$f(z) = z + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}, \quad 1 < |z| < \infty.$$

Vom prezenta în cele ce urmează un rezultat important al acestui subcapitol.

Teorema ariei 2.1.1.6. *Fie* $f \in \Sigma$, $f(z) = z + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}$, $1 < |z| < \infty$.

Atunci $\sum_{k=1}^{\infty} k|b_k|^2 \leq 1$.

În plus avem că $|b_1| \leq 1$. *Egalitatea are loc dacă şi numai dacă* g *este de forma*

$$g(z) = z + b_0 + \frac{\lambda}{z}, \quad 1 < |z| < \infty \text{ unde } |\lambda| = 1.$$

Înainte de a prezenta o consecinţă a teoremei ariei, prezentăm o propoziţie utilă în deducerea rezultatului următor.

Propoziţia 2.1.1.7. *(i) Dacă* $f \in S$ *şi* $g(\zeta) = \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)}$, *atunci* $g \in \Sigma$ *şi* $g(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in \Gamma$.

(ii) Dacă $g \in \Sigma$ *şi* $g(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in \Gamma$, *atunci* $f \in S$ *unde*

$$f(z) = \frac{1}{g\left(\dfrac{1}{z}\right)}, \quad z \in U.$$

Demonstraţie. (i) $f \in S \;\Rightarrow\; f \in \mathcal{H}_u(U)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$

$$g(\zeta) = \frac{1}{f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)}$$

f – injectivă pe $U \;\Rightarrow\; g$ injectivă pe Γ.

Din formula lui Taylor avem că:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_k z^k + \ldots, \quad |z| < 1, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \;\Rightarrow$$

$$g(\zeta) = \frac{1}{\dfrac{1}{\zeta} + \dfrac{a_2}{\zeta^2} + \dfrac{a_3}{\zeta^3} + \ldots + \dfrac{a_k}{\zeta^k}}$$
$$= \frac{\zeta}{1 + \dfrac{a_2}{\zeta} + \dfrac{a_2}{\zeta^2} + \ldots + \dfrac{a_k}{\zeta^{k-1}} + \ldots}$$

Pentru $|\zeta| > 1$ suficient de mare putem considera

$$w = \frac{a_2}{\zeta} + \frac{a_3}{\zeta^2} + \ldots \in U, \text{ adică } |w| < 1$$

şi folosim dezvoltarea în serie:

$$\frac{1}{1+w} = 1 - w + w^2 + \dots, \quad |w| < 1.$$

Deci

$$g(\zeta) = \zeta \left[1 - \left(\frac{a_2}{\zeta} + \frac{a_3}{\zeta^2} + \dots\right) + \left(\frac{a_2^2}{\zeta^2} + \frac{a_3^2}{\zeta^4} + \dots\right) - \dots\right]$$
$$= \zeta - a_2 - \frac{a_3}{\zeta} - \dots + \frac{a_2^2}{\zeta} + \frac{a_3^2}{\zeta^3} + \dots$$
$$= \zeta - a_2 + (a_2^2 - a_3) \cdot \frac{1}{\zeta} + \dots$$

În concluzie funcţia g se dezvoltă în serie Laurent la ∞ sub forma

$$g(\zeta) = \zeta + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{\zeta^k}, \quad 1 < |\zeta < \infty.$$

$$g(\infty) = \lim_{\zeta\to\infty} g(\zeta) = \lim_{\zeta\to\infty} \frac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{f(z)} = \infty$$

Observăm că $g'(\infty) = 1$.

Dacă $\zeta = \infty$ pol simplu pentru funcţia g dată de relaţia

$$g(\zeta) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$$

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{\zeta} = 0 \ \Leftrightarrow \ \zeta = \infty.$$

Aşadar g este olomorfă pe $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid 1 < |\zeta| < \infty\}$, deci $g \in \Sigma$. În plus $g(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in \Gamma$.

(ii) $g \in \Sigma \ \Rightarrow \ g(\zeta) = \zeta + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{\zeta^k}$, $1 < |\zeta| < \infty$

$$f(z) = \frac{1}{g\left(\frac{1}{z}\right)}$$

g – injectivă pe $\Gamma \ \Rightarrow \ f$ injectivă pe U

$$f(0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{\zeta\to\infty} \frac{1}{g(\zeta)} = 0$$

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{1}{z}}{g\left(\frac{1}{z}\right)}$$

$$= \lim_{\zeta\to\infty} \frac{\zeta}{g(\zeta)} = \lim_{\zeta\to\infty} \frac{1}{g'(\zeta)} = 1$$

Evident f olomorfă pe U.

În concluzie $f \in S$.

Următoarea teoremă furnizează o estimare a coeficientului a_2 din dezvoltarea în serie Taylor a funcţiilor din clasa S.

Teorema 2.1.1.8. *Fie* $f \in S$, $f(z) = z + \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k z^k$.

Atunci $|a_2| \leq 2$. *Egalitatea* $|a_2| = 2$ *are loc dacă şi numai dacă* f *este o rotaţie a funcţiei lui Koebe.*

Demonstraţie. $f \in S \;\Rightarrow\; f(0) = 0$ şi $f(z) \neq 0$, $\forall\, z \in \dot{U}$, adică f fiind univalentă $z = 0$ este unicul zero al funcţiei.

Fie $g : U \to \mathbb{C}$, $g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ pentru $z \in \dot{U}$ şi $g(0) = 1$.

Atunci $g \in \mathcal{H}(U)$ şi $g(z) \neq 0$, $z \in U$.

Din Teorema ramurilor uniforme pentru aplicaţia putere 1.2.3.1 cu $\alpha = \dfrac{1}{2}$ avem că există o unică ramură uniformă h pe U a aplicaţiei multivoce $[g(z^2)]^{1/2}$ astfel încât $h(0) = 1$. Fie $g(z) = zh(z)$, $z \in U$ şi se observă că $q \in \mathcal{H}(U)$, iar $q(0) = 0$ şi $q'(0) = h(0) = 1$.

Arătăm că q este injectivă pe U. Fie $z_1, z_2 \in U$ cu $q(z_1) = q(z_2)$

$$\Rightarrow\; q^2(z_1) = q^2(z_2) \;\Leftrightarrow\; z_1^2 h^2(z_1) = z_2^2 h^2(z_2).$$

Dar h este ramura uniformă a aplicaţiei $[g(z^2)]^{1/2} \;\Rightarrow\; h^2(z) = g(z^2)$, iar $g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$.

Deci $q^2(z_1) = q^2(z_2) \;\Leftrightarrow\; z_1^2 g(z_1^2) = z_2^2 g(z_2^2) \;\Leftrightarrow\; f(z_1^2) = f(z_2^2)$.

$f \in S \;\Rightarrow\; f$ univalentă şi obţinem că $z_1^2 = z_2^2$, adică $z_1 = \pm z_2$.

Dacă $z_1 = -z_2 \;\Rightarrow$

$$q(z_1) = z_1 h(z_1) = -z_2 h(-z_2) = -z_2 (g[(z_2)^2])^{1/2} = -z_2 h(z_2) = -q(z_2).$$

Dar am presupus că $q(z_1) = q(z_2) \;\Rightarrow\; q(z_1) = q(z_2) = 0 \;\Leftrightarrow\; z_1 h(z_1) = z_2 h(z_2) = 0.$

Dar din faptul că $h(z) \neq 0$, $z \in U$ obţinem $z_1 = z_2 = 0$.

În concluzie în ambele cazuri obţinem $z_1 = z_2$, deci funcţia q este injectivă pe U. Am arătat anterior că $q \in \mathcal{H}(U)$, $q(0) = 0$ şi $q'(0) = 1$, deci deducem $q \in S$.

Ţinând cont de relaţia $h^2(z) = \dfrac{f(z^2)}{z^2}$, $z \in \dot{U}$ şi de faptul că $q(z) = zh(z)$ putem calcula coeficientul $b_2 = \dfrac{g'(0)}{2}$ din dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei q în origine. Se obţine $b_2 = \dfrac{a_2}{2}$, unde a_2 era coeficientul dezvoltării în serie de puteri a funcţiei f. Deci avem că:

$$q(z) = z + \frac{a_2}{2} z^3 + \dots, \quad z \in U.$$

Fie în continue, funcţia $p(\zeta) = \dfrac{1}{q\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)}$, $\zeta \in \Gamma$.

Cum $q \in S$, din Propoziţia 2.1.1.7 rezultă că $p \in \Sigma$,

$$p(\zeta) = \frac{1}{q\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)} = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \frac{\alpha_2}{\zeta^2} + \dots$$

Prin calcul obţinem

$$p(\zeta) = \zeta - \frac{a_2}{2} \cdot \frac{1}{\zeta} + \dots, \quad 1 < |\zeta| < \infty.$$

Din Teorema 2.1.1.6 obţinem că $\left|\dfrac{a_2}{2}\right| \leq 1$, iar egalitatea $\left|\dfrac{a_2}{2}\right| = 1 \;\Leftrightarrow$

$$p(\zeta) = \zeta + b_0 + \frac{\lambda}{\zeta}, \quad 1 < |\zeta| < \infty, \ |\lambda| = 1.$$

În cazul nostru $p(\zeta) = \zeta - \dfrac{a_2}{2} \cdot \dfrac{1}{\zeta}$, pentru că $b_0 = 0$.

Notând $\dfrac{a_2}{2} = \lambda$, atunci $|\lambda| = 1$

$$q(z) = \frac{1}{p\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\dfrac{1}{z} - \lambda z} = \frac{z}{1 - \lambda z^2}, \quad z \in U.$$

Avem că

$$f(z^2) = z^2 h^2(z) = q^2(z) = \frac{z^2}{(1 - \lambda z^2)^2}$$

şi rezultă că

$$f(z) = \frac{z}{(1 - \lambda z)^2}, \quad z \in U,$$

adică f este o rotaţie a funcţiei Koebe.

Reciproc dacă $f(z) = \dfrac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$, $\theta \in \mathbb{R}$, atunci prin calcul obţinem

$$f(z) = z + 2e^{i\theta}z^2 + \ldots, \quad z \in U$$

şi deci $|a_2| = |2e^{i\theta}| = 2$.

În concluzie $|a_2| = 2$ dacă şi numai dacă f este o rotaţie a funcţiei lui Koebe.

Observaţia 2.1.1.9. Funcţia lui Koebe este dată de

$$f(z) = \frac{z}{(1+z)^2}, \quad z \in U.$$

Considerăm $f_r : U \to \mathbb{C}$ o rotaţie a funcţiei lui Koebe de unghi r. Atunci

$$f_r(z) = e^{-ir} f(e^{ir}z), \quad z \in U.$$

Dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei f_r este

$$f_r(z) = z - 2e^{ir}z^2 + 3e^{2ir}z^3 - \ldots + (-1)^{n-1}ne^{(n-1)ir}z^n + \ldots, \quad z \in U.$$

Se observă că pentru această funcţie avem $|a_n| = n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

L. Bieberbach a formulat, pornind de la această observaţie, faimoasa sa conjectură.

Conjectura lui Bieberbach 2.1.1.10. *Fie $f \in S$ o funcţie care admite dezvoltarea în serie de puteri*

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k.$$

Atunci avem că $|a_n| \leq n$, $\forall\, n \geq 2$.

Egalitatea $|a_n| = n$, $\forall\, n \geq 2$ are loc dacă şi numai dacă f este o rotaţie a funcţiei lui Koebe.

Observaţia 2.1.1.11. Cazuri particulare ale Conjecturii lui Bieberbach au fost demonstrate în 1916 de către el însuşi (pentru $n = 2$), în 1923 de către K. Loewner (pentru $n = 3$), în 1955 de către P.R. Garabedian şi M. Schiffer (pentru $n = 4$), în 1968 de către R.N. Pederson (pentru $n = 6$) şi în 1972 de către R.N. Pederson şi M. Schiffer (pentru $n = 5$).

Dar întreaga Conjectură a fost demonstrată abia în 1984 de către L. de Branges care a folosit metoda lui Loewner.

În cele ce urmează vom prezenta Teorema de acoperire a lui Koebe-Bieberbach ca şi aplicaţie a teoremei anterioare.

Teorema 2.1.1.12. *Fie $f \in S$. Atunci $U_{1/4} \subseteq f(U)$.*

Demonstraţie. Fie $\zeta \in \mathbb{C}$ astfel încât $\zeta \notin f(U)$. Deci $f(z) \neq \zeta$, $z \in U$ sau

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta} \neq 1, \quad z \in U.$$

Fie $g : U \to \mathbb{C}$, $g(z) = \dfrac{f(z)}{1 - \dfrac{f(z)}{\zeta}}$, $z \in U$.

$f \in S \;\Rightarrow\; f(0) = 0,\; f'(0) = 1$

Deci $g(0) = 0$

$$g'(z) = \frac{f'(z)\left(1 - \dfrac{f(z)}{z}\right) + f'(z)\dfrac{f'(z)}{\zeta}}{\left(1 - \dfrac{f(z)}{\zeta}\right)^2} = \frac{f'(z)}{\left(1 - \dfrac{f(z)}{\zeta}\right)^2}$$

şi obţinem $g'(0) = 1$.

Se observă că $f \in \mathcal{H}_u(U)$, deci $g \in S$.

Fie dezvoltarea în serie de puteri a lui f:

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in U, \text{ unde } a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Din calcul obţinem că dezvoltarea în serie de puteri a lui g este

$$g(z) = z + \left(a_2 + \frac{1}{\zeta}\right) z^2 + \ldots, \quad z \in U.$$

Cum $g \in S$ rezultă din Teorema 2.1.1.8 că

$$\left|a_2 + \frac{1}{\zeta}\right| \leq 2.$$

Cum $f \in S$ rezultă din Teorema 2.1.1.8 că $|a_2| \leq 2$.

Deci

$$\left|\frac{1}{\zeta}\right| \leq \left|a_2 + \frac{1}{\zeta}\right| + |a_2| \leq 4 \;\Leftrightarrow\; |\zeta| \geq \frac{1}{4}.$$

Dar $\zeta \notin f(U)$ şi este arbitrar, rezultă că $U_{1/4} \subseteq f(U)$.

Observaţia 2.1.1.13. Din Teorema precedentă putem deduce că

$$\bigcap_{f \in S} f(U) = U\left(0; \frac{1}{4}\right).$$

Pentru justificare observăm că $f(u) \supseteq U\left(0; \frac{1}{4}\right)$ implică

$$\bigcap_{f \in S} f(U) \supseteq U\left(0; \frac{1}{4}\right).$$

Dar ştim că orice rotaţie a funcţiei lui Koebe este din clasa S.

$$f_\theta(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta}z)^2} \in S, \quad z \in U.$$

Din rezultate anterioare legate de funcţia lui Koebe ştim că

$$\bigcap_{\theta \in \mathbb{R}} f_\theta(z) = U\left(0; \frac{1}{4}\right).$$

De aici deducem că

$$\bigcap_{f \in S} f(U) = U\left(0; \frac{1}{4}\right).$$

Deci

$$\bigcap_{f \in S} f(U) = U\left(0; \frac{1}{4}\right).$$

Geometric putem interpreta această egalitate astfel: $U\left(0; \frac{1}{4}\right)$ este discul cu centrul în origine şi rază maximă, care este acoperit de imaginea discului unitate prin orice funcţie din clasa S.

Prezentăm în continuare Teorema de deformare şi distorsiune pentru clasa S.

Teorema 2.1.1.14. *Fie $f \in S$. Atunci au loc relaţiile:*

(i) $\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \ z \in U$

(ii) $\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \ z \in U.$

O altă proprietate importantă a clasei S este compactitatea sa.

În cele ce urmează vom demonstra acest rezultat.

Teorema 2.1.1.15. *S este o submulţime compactă a lui $\mathcal{H}(U)$.*

Demonstraţie. Ţinând cont de Teorema 1.1.52 şi de faptul că $S \subseteq \mathcal{H}(U)$, deducem că mulţimea S este compactă dacă şi numai dacă S este local uniform mărginită şi închisă.

Mai întâi arătăm că S este local uniform mărginită.

În acest sens, demonstrăm că pentru orice $r \in (0,1)$, există $M(r) > 0$ astfel încât

$$|f(z)| \leq M(r), \quad |z| \leq r, \ \forall \ f \in S.$$

Fie $f \in S$ şi $r \in (0,1)$. Atunci avem din Teorema 2.1.1.14 că

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \text{ pentru } |z| < 1.$$

Alegem $M(r) = \dfrac{r}{(1-r)^2} > 0$.
Se observă că această constantă nu depinde de $f \in S$, deci pentru $|z| = r$ obţinem

$$|f(z)| \leq M(r).$$

Din Teorema maximului modulului (Teorema 1.1.15) deducem că

$$\max\{|f(z)| \mid |z| \leq r\{= \max\{|f(z)| \mid |z| = r\}, \ \forall \ r \in (0,1).$$

Aici am folosit faptul că f nu este constantă. Prin urmare,

$$|f(z)| \leq M(r) \text{ pentru } |z| \leq r < 1.$$

Deducem de aici că S este local uniform mărginită.

Pentru a demonstra că S este închisă, fie un şir oarecare $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ astfel încât $f_n \overset{u.c.}{\rightrightarrows} f$ şi arăt că $f \in S$.

Din Teorema lui Weierstrass 1.1.24 rezultă că $f \in \mathcal{H}(U)$, $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 1$. Pe de altă parte, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de funcţii univalente pe U care converge uniform pe compacte la f. Din Corolarul 1.1.56 (o variantă a Teoremei lui Hurwitz) rezultă că f este constantă sau injectivă pe U. Dar $f'(0) = 1$, deci f nu poate fi constantă. Rezultă că f este injectivă pe U şi în concluzie $f \in S$. Am demonstrat deci că S este local uniform mărginită şi închisă, în concluzie obţinem că S este compactă.

2.1.2 Convergenţa în nucleu

Definiţia 2.1.2.1. Fie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de domenii, $A_n \subseteq \mathbb{C}$, astfel încât $0 \in A_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(i) Dacă $0 \in int\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$, atunci un domeniu $A \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte nucleul şirului $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dacă, în plus, A este cel mai larg domeniu din $\mathbb{C}$ astfel încât pentru orice compact $K \subset A$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $K \subset A_n$, $n \geq n_0$.

(ii) Dacă $0 \notin int\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$, atunci nucleul şirului $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este $\{0\}$.

Prin noţiunea de cel mai larg domeniu cu proprietatea respectivă înţelegem că oricare ar fi un alt domeniu $B \subseteq \mathbb{C}$ care satisface proprietatea avem că $B \subseteq A$,

Să observăm totodată că nucleul unui şir de domenii există şi este bine definit.

Luăm

$$\mathcal{F} = \{B \subseteq \mathbb{C} \mid 0 \in B,\ \forall\, K \subseteq B,\ K \text{ compactă},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } K \subset A_n,\ n \geq n_0\}$$

şi

$$\mathcal{G} = \bigcup_{B\in\mathcal{F}} B.$$

Observăm că prin definiţie $A \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; A \subseteq \mathcal{G}$.

Dar A este cel mai larg domeniu din $\mathbb{C}$ cu această proprietate, deci $\forall\, B \in \mathcal{F}$ avem că

$$B \subseteq A \;\Rightarrow\; \bigcup_{B\in\mathcal{F}} \subseteq A \;\Rightarrow\; \mathcal{G} \subseteq A.$$

Deci $A = \mathcal{G}$ şi am găsit nucleul şirului $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definiţia 2.1.2.3. Fie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de domenii, $A_n \subseteq \mathbb{C}$ şi notăm cu A nucleul şirului. Spunem că şirul $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge în nucleu la A, $A_n \to A$, dacă orice subşir al şirului $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are acelaşi nucleu A.

Exemplul 2.1.2.4. Alegem un şir de domenii $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n \subseteq \mathbb{C}$ astfel încât $A_n \subseteq A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ şi $0 \in A_0$. Atunci nucleul şirului este

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

şi avem că $A_n \to A$.

Rezultatul central al acestui subcapitol este Teorema lui Carathéodory. Acest rezultat ne dă legătura dintre noţiunile de convergenţă uniformă pe compacte a unui şir univalent $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pe discul unitate şi convergenţa în nucleu a şirului de domenii simplu conexe $(f_n(U))_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 2.1.2.5. (Teorema Carathéodory). *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii cu proprietatea că $f_n \in \mathcal{H}_u(U)$, $f_n(0) = 0$, $f_n'(0) = \alpha_k$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, unde $\alpha_k > 0$. Notăm cu $A_n = f_n(U)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ şi cu A nucleul şirului $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Dacă presupunem că $A \neq \mathbb{C}$, atunci şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform pe compacte în U la o funcţie f dacă şi numai dacă şirul $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge în nucleu la A.

În funcţie de nucleul şirului $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ distingem două cazuri:

(i) $A = \{0\}$ dacă şi numai dacă $f \equiv 0$

(ii) $A \neq \{0\}$. Atunci $A = f(U)$, iar $f \in \mathcal{H}_u(U)$.

În plus, şirul $(f_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform pe compacte în A la f^{-1}.

Exemplul 2.1.2.6. Fie şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin

$$f_n(z) = \frac{4z}{n(1-z)^2}, \quad z \in U,\ n \in \mathbb{N}.$$

Observăm că funcţia f_n este funcţia Koebe înmulţită cu o constantă. Ştim că imaginea discului unitate prin funcţia lui Koebe este

$$\mathbb{C} \setminus \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq -\frac{1}{4},\ \operatorname{Im} z = 0 \right\}$$

şi deducem că

$$A_n = f_n(U) = \mathbb{C} \setminus \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq -\frac{1}{n},\ \operatorname{Im} z = 0 \right\}.$$

În plus observăm că $f_n(0) = 0$ şi $f_n'(0) = \dfrac{4}{n} > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Atunci $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = 0$ uniform pe compacte în U şi din Teorema lui Carathéodory deducem că este echivalent cu $A_n \to \{0\}$ în sensul convergenţei în nucleu.

2.2 Funcţii stelate, convexe şi spiralate

În această secţiune ne vom referi la unele subclase speciale de funcţii univalente pe discul unitate U: funcţiile stelate, convexe şi spiralate.

2.2.1 Funcţii stelate

Definiţia 2.2.1.1. O funcţie $f \in \mathcal{H}(U)$ cu $f(0) = 0$ se numeşte stelată în U în raport cu originea dacă f este chiar univalentă pe U şi $f(U)$ este un domeniu stelat în raport cu originea.

Observaţia 2.2.1.2. (i) Reamintim că un domeniu A se numeşte domeniu stelat în raport cu originea dacă pentru orice $z \in A$ segmentul închis care uneşte originea cu z este inclus în A.

(ii) Funcţia lui Koebe $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ este stelată deoarece $f \in S$ şi

$$f(U) = \mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} w \leq -1, \ \operatorname{Im} w = 0\}$$

este domeniu stelat în raport cu originea. De asemenea, rotaţiile funcţiei Koebe sunt stelate.

Următoarea teoremă ne dă caracterizarea analitică a stelarităţii.

Teorema 2.2.1.3. *Fie funcţia $f \in \mathcal{H}(U)$ astfel încât $f(0) = 0$. Atunci f este funcţie stelată dacă şi numai dacă $f'(0) \neq 0$ şi*

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0, \quad z \in U.$$

Observaţia 2.2.1.4. Nu prezentăm aici demonstraţia, deoarece o vom prezenta ulterior prin intermediul lanţurilor de subordonare diferenţială.

Definiţia 2.2.1.5. Notăm cu S^* clasa funcţiilor $f \in \mathcal{H}(U)$ de forms

$$f(z) = z + a_2 z_2^{+} \dots, \quad z \in U,$$

care sunt stelate în discul unitate, adică

$$S^* = \left\{ f \in \mathcal{H}(U) \mid f(z) = z + a_2 z^2 + \dots, \ \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0, \ z \in U \right\}.$$

Observaţia 2.2.1.6. Menţionăm că doar relaţia

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0$$

nu implică univalenţa funcţiei. Un contraexemplu în acest sens este $f(z) = z^2$.

Înainte de a prezenta proprietăţi ale clasei S^*, introducem clasa funcţiilor lui Carathéodory.

Definiţia 2.2.1.7. Clasa funcţiilor lui Carathéodory o notăm cu $\mathcal{P}$ şi este definită prin

$$\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{H}(U) \mid f(0) = 1,\ \mathrm{Re}\, f(z) > 0,\ z \in U\}.$$

Exemplul 2.2.1.8. Fie $f : U \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$. Ştim că această funcţie transformă discul unitate în semiplanul drept, deci $\mathrm{Re}\, f(z) > 0$, $z \in U$.

Se observă de asemenea că $f \in \mathcal{H}(U)$ şi $f(0) = 1$.

În concluzie $f \in \mathcal{P}$.

Ca şi clasa S, clasa $\mathcal{P}$ este caracterizată printr-o teoremă de deformare.

Teorema 2.2.1.9. *Fie $f \in \mathcal{P}$ şi $z \in U$. Atunci au loc relaţiile:*

(i) $\dfrac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \dfrac{1+|z|}{1-|z|}$

(ii) $\dfrac{1-|z|}{1+|z|} \leq \mathrm{Re}\, f(z) \leq \dfrac{1+|z|}{1-|z|}$.

Observaţia 2.2.1.10. Analog cu demonstraţia clasei S se poate arăta că clasa $\mathcal{P}$ este compactă.

Prezentăm în cele ce urmează teorema lui Carathéodory asupra coeficienţilor funcţiilor din clasa $\mathcal{P}$.

Teorema 2.2.1.11. *Fie $f \in \mathcal{P}$ de forma*

$$f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

atunci $|a_n| \leq 2$, $\forall\ n \geq 1$. Egalitatea se atinge dacă funcţia f este de forma

$$f(z) = \frac{1+\lambda z}{1-\lambda z}, \quad |\lambda| = 1.$$

Revenind la proprietăţile clasei S^* prezentăm teorema de delimitare a coeficienţilor funcţiilor din S^*.

Teorema 2.2.1.12. *Fie $f \in S^*$ o funcţie cu dezvoltarea*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

Atunci $|a_n| \leq n$, $\forall\, n \geq 2$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă f este o rotaţie a funcţiei lui Koebe.

Demonstraţie. Fie $g : U \to \mathbb{C}$, $g(z) = \dfrac{zf'(z)}{f(z)}$, $z \in U \setminus \{0\}$ şi $g(0) = 1$. Atunci g este olomorfă pe U. Într-adevăr $g \in \mathcal{H}(U \setminus \{0\})$ şi g este continuă pe U, adică $g \in \mathcal{H}(U)$.

Fie dezvoltarea în serie de puteri a lui g:

$$g(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots$$

Deoarece $zf'(z) = g(z)f(z)$, deducem că

$$z(1 + 2a_2 z + \ldots + na_n z^{n-1} + \ldots)$$

$$= (1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots)(z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots)$$

$$z \cdot 1 + z^2 \cdot 2a_2 + \ldots + z^n \cdot na_n + \ldots = z \cdot 1 + z^2(a_2 + b_1) + z^3(a_3 + b_1 a_2 + b_2) + \ldots$$

Egalând coeficienţii obţinem relaţia:

$$(n-1)a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \ldots + b_{n-2} a_2 + b_{n-1}$$

Calculăm

$$g(0) = \frac{z(1 + 2a_2 z + \ldots + na_n z^{n-1} + \ldots)}{z(1 + a_2 z + \ldots + a_n z^{n-1})}\bigg|_{z=0} = 1.$$

Din Teorema 2.2.1.3 avem că $\operatorname{Re} \dfrac{zf'(z)}{f(z)} > 0$, adică $\operatorname{Re} g(z) > 0$.

Din ultimele două relaţii şi observând că $g \in \mathcal{H}(U)$, deducem că $f \in \mathcal{P}$. Aşadar putem aplica Teorema lui Carathéodory 2.2.1.11 şi deducem că $|b_n| \leq 2$, $\forall\, n \geq 1$.

Din Teorema 2.1.1.9 avem că $|a_2| \leq 2$.

Demonstrăm prin inducţie că $|a_n| \leq n$, $\forall\, n \geq 2$.

Presupunem $|a_k| \leq k$, $\forall\, k = \overline{2, n-1}$.

Din formula de recurenţă avem că:

$$(n-1)|a_n| \leq |b_1 a_{n-1}| + |b_2 a_{n-2}| + \ldots + |b_{n-2} a_2| + |b_{n-1}|$$

$$\leq 2(1 + |a_2| + \ldots + |a_{n-1}|).$$

În continuare, din ipoteza inducţiei obţinem

$$(n-1)|a_n| \leq 2(1+2+\ldots+(n-1)) = 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = (n-1)n$$

Deci $|a_n| \leq n$.

În concluzie avem că $|a_n| \leq n,\ \forall\ n \geq 2$.

Dacă presupunem că are loc egalitate, atunci avem şi $|a_2| = 2$.

Cum $f \in S^* \subset S$, deducem din Teorema 2.1.1.8 că f este o rotaţie a funcţiei lui Koebe.

Reciproc, dacă f este o rotaţie a funcţiei lui Koebe, ştim din Observaţia 2.1.1.9 că f are o dezvoltare în serie de forma

$$f(z) = z - 2e^{i\theta}z^2 + 3e^{2i\theta}z^3 - \ldots + (-1)^{n-1}ne^{(n-1)i\theta}z^n + \ldots, \quad z \in U.$$

De aici deducem că $|a_n| = n$, deci avem egalitate.

Din teorema următoare putem observa că teorema de deformare relativă la clasa S este valabilă şi pentru clasa S^*.

Teorema 2.2.1.4. *Fie $f \in S^*$ şi $z \in U$. Atunci au loc relaţiile:*

(i) $\dfrac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \dfrac{|z|}{(1-|z|)^2}$

(ii) $\dfrac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \dfrac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$

(iii) $\dfrac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left|\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \dfrac{1+|z|}{1-|z|}$.

Egalitatea în relaţii se obţine când f este o rotaţie a funcţiei lui Koebe.

O consecinţă a acestei teoreme este proprietatea de compactitate a clasei S^* dată de următoarea teoremă.

Teorema 2.2.1.5. *S^* este o submulţime compactă a lui $\mathcal{H}(U)$.*

2.2.2 Funcţii convexe

Definiţia 2.2.2.1. O funcţie $f \in \mathcal{H}(U)$ se numeşte convexă în U dacă f este univalentă în U şi $f(U)$ este un domeniu convex.

Exemplul 2.2.2.2. (i) Fie $f : U \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$.

Observăm că funcţia f transformă cercul de rază 1 într-o dreaptă şi dând valori obţinem pe $f(U)$ astfel:

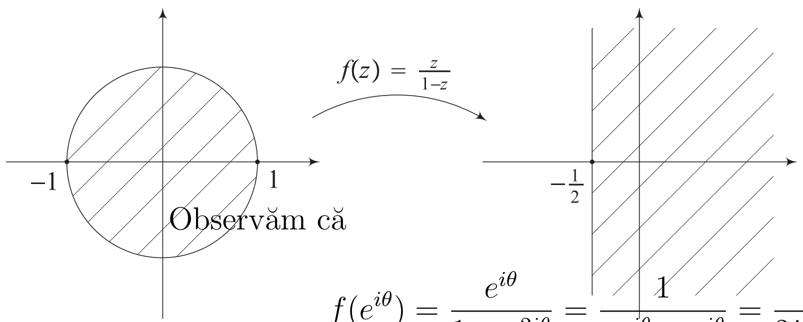
Deci $f(U)$ este un domeniu convex.

Cum $f \in \mathcal{H}_u(U)$ avem că f este funcţie convexă.

(ii) Fie $f : U \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{z}{1-z^2}$.

Funcţia f este univalentă pe U şi transformă discul unitate în mulţimea $\mathbb{C} \setminus A$, unde

$$A = \left\{ w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w = 0,\ \operatorname{Im} w \leq -\frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w = 0,\ \operatorname{Im} w \geq \frac{1}{2} \right\}$$



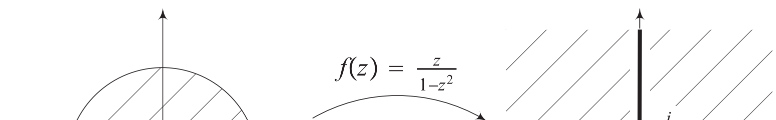
Observăm că

$$f(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}}{1-e^{2i\theta}} = \frac{1}{e^{-i\theta}-e^{i\theta}} = \frac{1}{2i\sin(-\theta)} = \frac{i}{2\sin\theta}.$$

Deci avem că

$$\operatorname{Im} f(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\sin\theta} \in \left[-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right], \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Atunci $f(\partial U) = A$ şi va rezulta că $f(U) = \mathbb{C} \setminus A$.



De asemenea avem că $f \in \mathcal{H}(U)$ şi f este injectivă prin următorul raţionament:

Fie $z_1, z_2 \in U$ cu $f(z_1) = f(z_2)$, atunci

$$\frac{z_1}{1-z_1^2} = \frac{z_2}{1-z_2^2},$$

ceea ce implică $(z_1 - z_2)(1 + z_1 z_2) = 0$.

Dar $z_1, z_2 \in U$, deci $z_1 z_2 \neq -1$ şi rezultă că $z_1 = z_2$, adică f este injectivă pe U.

Observăm că domeniul $f(U)$ este stelat în raport cu originea, dar nu este convex.

Prezentăm în continuare caracterizarea analitică a convexităţii.

Teorema 2.2.2.3. *Fie $f \in \mathcal{H}(U)$. Atunci f este funcţia convexă dacă şi numai dacă*

$$f'(0) \neq 0 \quad \textit{şi} \quad \operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 > 0, \quad z \in U.$$

Observaţia 2.2.2.4. Ca şi în cazul funcţiilor stelate, demonstraţia acestei teoreme o vom prezenta în capitolul următor folosind lanţuri de subordonare diferenţială.

O teoremă importantă ce caracterizează funcţiile convexe este Teorema de dualitate a lui Alexander.

Teorema 2.2.2.5. *Funcţia f este convexă în U dacă şi numai dacă funcţia $g(z) = zf'(z)$ este stelată în U.*

Demonstraţie. Presupunem că f este convexă. Din caracterizarea analitică (Teorema 2.2.2.3) avem că

$$f'(0) \neq 0 \quad \text{şi} \quad \operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} > -1.$$

Din expresia funcţiei $g(z) = zf'(z)$ deducem că $g \in \mathcal{H}(U)$ şi $g(0) = 0$

$$g'(z) = f'(z) + zf''(z)$$

Avem că $g'(0) = 0 \;\Leftrightarrow\; f'(0) = 0$.

Cum ştim $f'(0) \neq 0$, deducem $g'(0) \neq 0$.

$$\operatorname{Re}\frac{zg'(z)}{g(z)} = \operatorname{Re}\frac{z(f'(z) + zf''(z))}{zf'(z)} = 1 + \operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} > 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} > -1$$

Din Teorema 2.2.1.3 care ne dă caracterizarea analitică a stelarităţii rezultă că g este stelată în U.

Reciproc, presupunem că g este stelată în U şi analog prin cele două caracterizări analitice şi echivalenţele de mai sus rezultă că f este convexă în U.

Definiţia 2.2.2.6. Fie

$$K = \left\{ f \in \mathcal{H}(U) \mid f(z) = z + a_2 z^2 + \dots, \ \operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 > 0, \ z \in U \right\}$$

clasa funcţiilor normate convexe pe U.

Observaţia 2.2.2.7. Din teorema anterioară deducem că dacă $f \in K$, atunci $zf'(z) \in S^*$. Dar

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

$$zf'(z) = z + 2a_2 z^2 + \dots + na_n z^n + \dots$$

Deci alegând

$$g(z) = z + \frac{a_2}{2} z^2 + \dots + \frac{a_n}{n} z^n \in K$$

obţinem $g(z) = zg'(z) \in S^*$.

Deci are loc incluziunea $K \subset S^* \subset S$.

Observaţia 2.2.2.8. Teorema de dualitate a lui Alexander se poate reformula, folosind notaţia clasei K, astfel: $f \in K$ dacă şi numai dacă $zf'(z) \in S^*$.

Prezentăm în continuare teorema de delimitare a coeficienţilor funcţiilor din clasa K.

Teorema 2.2.2.9. *Fie funcţia $f \in K$, $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$ Atunci $|a_n| \leq 1$, $\forall\ n \geq 2$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă f este de forma*

$$f(z) = \frac{z}{1 - e^{i\theta} z}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Demonstraţie. Conform Observaţiei anterioare $f \in K$ dacă şi numai dacă

$$zf'(z) = z + 2a_2 z^2 + \dots + na_n z^n + \dots \in S^*$$

Dar din Teorema de delimitare a coeficienţilor funcţiilor din S^* (Teorema 2.2.1.12) avem că

$$|na_n| \leq n, \ \forall\ n \geq 2, \text{ deci } |a_n| \leq 1, \ \forall\ n \geq 2.$$

Tot din teorema respectivă avem că egalitatea are loc dacă şi numai dacă $zf'(z)$ este o rotaţie a funcţiei lui Koebe, adică

$$zf'(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2},$$

de unde deducem că

$$f(z) = \frac{z}{1+e^{i\theta}z}.$$

În cazul clasei K are loc următoarea teoremă de deformare:

Teorema 2.2.2.10. *Fie $f \in K$ şi $z \in U$. Atunci au loc următoarele relaţii:*

(i) $\dfrac{|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \dfrac{|z|}{1-|z|}$

(ii) $\dfrac{1}{(1+|z|)^2} \leq |f'(z)| \leq \dfrac{1}{(1-|z|)^2}$.

Egalităţile au loc dacă şi numai dacă f este de forma

$$f(z) = \frac{z}{1+e^{i\theta}z}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Înainte de a prezenta Teorema de acoperire pentru clasa K, prezentăm o proprietate a funcţiilor convexe necesară în demonstraţia teoremei ulterioare.

Proprietatea 2.2.2.11. *Fie f o funcţie convexă în U cu proprietatea că $f(z) \neq 0$, $\forall\ z \in U$. Atunci funcţia $g = f^2 \in \mathcal{H}_u(U)$.*

Demonstraţie. Fie $z_1, z_2 \in U$ astfel încât $g(z_1) = g(z_2)$, adică $f^2(z_1) = f^2(z_2)$. De aici rezultă că $f(z_1) = f(z_2)$ sau $f(z_1) = -f(z_2)$. Dacă $f(z_1) = -f(z_2)$, deducem din ipoteza că f este convexă faptul că

$$\frac{f(z_1)+f(z_2)}{2} = 0 \in f(U).$$

Deci ajungem la o contradicţie, deoarece $f(z) \neq 0$ pentru orice z din U.

În concluzie avem $f(z_1) = f(z_2)$ şi $f \in \mathcal{H}_u(U)$.

Teorema 2.2.2.12. (Teorema de acoperire pentru clasa K) *Fie funcţia $f \in K$. Atunci pentru $w \in \mathbb{C}$ cu $w \notin f(U)$ avem că $|w| \geq \dfrac{1}{2}$.*

Demonstraţie. Cum $f \in K$ avem că $f(z)$ este funcţie convexă, deci şi $f(z) - w$ este o funcţie convexă. Cum $w \notin f(U)$ avem că $f(z) - w \neq 0$, $\forall\ z \in U$. Din proprietatea anterioară deducem că funcţia $g(z) = [g(z) - w]^2$ este univalentă în U. Prin calcul avem că $g(0) = w^2$ şi $g'(0) = -2w$. Alegând funcţia

$$h(z) = \frac{w^2 - g(z)}{2w}$$

deducem din cele de mai sus că $g \in S$.

Cum $f(z) - w \neq 0$, $\forall\ z \in U$, adică $g(z) \neq 0$, $\forall\ z \in U$, deducem că

$$h(z) \neq \frac{w}{2},\ \forall\ z \in U.$$

Din Teorema 2.1.1.12 de acoperire pentru clasa S rezultă că

$$\left|\frac{w}{2}\right| \geq \frac{1}{4},\ \text{adică } |w| \geq \frac{1}{2},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Observaţia 2.2.2.13. Din Teorema 2.2.2.12 rezultă că $f(U) \supseteq U\left(0; \frac{1}{2}\right)$, pentru orice $f \in K$.

Ca şi la clasa S, din Teorema de acoperire a clasei K deducem că

$$\bigcap_{f \in K} f(U) = U\left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Deci $\frac{1}{2}$ este raza maximă a discului centrat în origine care este acoperit de imaginea discului unitate prin orice funcţie din clasa K.

2.2.3 Funcţii spiralate

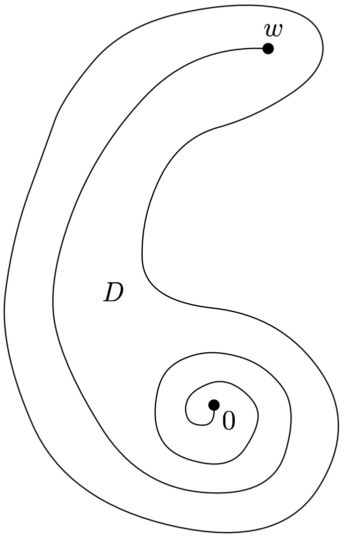
Definiţia 2.2.3.1. Fie $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. O α-spirală logaritmică este dată de

$$w = w_0 e^{-i\alpha} t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad w_0 \in \mathbb{C}^*.$$

Observaţia 2.2.3.2. Dacă $w = w(t)$ este o α-spirală logaritmică, atunci

$$\operatorname{Im}\left[e^{i\alpha} e_n w(t)\right] = \text{constant}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Definiţia 2.2.3.3. Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ domeniu cu $0 \in D$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Dacă pentru $\forall\ w \in D$ arcul de α-spirală ce uneşte punctul w_0 cu originea e inclus în D, atunci D se numeşte domeniu α-spiralat (spiralat de tip α).



Observaţia 2.2.3.4. O curbă închisă γ este logaritmică spiralată de tip α dacă fiecare spirală α-logaritmică $w = w(t)$ intersectează γ într-un unic punct.

Curba γ va fi o curbă Jordan, iar domeniul mărginit cu frontiera γ este un domeniu spiralat de tip α.

Observaţia 2.2.3.5. Orice domeniu spiralat de tip α este simplu conex.

Definiţia 2.2.3.6. Fie $f : U \to \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$, $f(0) = 0$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Spunem că f este spiralată de tip α dacă $f \in \mathcal{H}_u(U)$ şi $f(U)$ este un domeniu spiralat de tip α.

Notaţie 2.2.3.7. Notăm cu $\widehat{S}_\alpha$ clasa funcţiilor normalizate spiralate de tip α.

Definiţia 2.2.3.6. O funcţie $f : U \to \mathbb{C}$ se numeşte spiralată dacă există $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât f este spiralată de tip α.

Are loc următoarea teoremă de caracterizare analitică a spiralităţii.

Teorema 2.2.3.7. *Fie* $f : U \to \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. *Atunci f este spiralată de tip α dacă şi numai dacă*

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0.$$

Teorema 2.2.3.8. *Fie* $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta = e^{-i\alpha}\cos\alpha$.

Atunci $f \in S_\alpha^1$ dacă şi numai dacă există $g \in S^*$ astfel încât

$$f(z) = z\left(\frac{g(z)}{z}\right)^\beta, \quad z \in U.$$

Ramura funcţiei putere este aleasă astfel încât

$$\left(\frac{g(z)}{z}\right)^{\beta}\Bigg|_{z=0} = 1.$$

Demonstraţie. Presupunem $f \in \widehat{S}_{\alpha}$. Relaţia

$$f(z) = z\left(\frac{g(z)}{z}\right)^{\beta}$$

este echivalentă cu

$$g(z) = z\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\frac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha}}.$$

Alegem ramura uniformă a funcţiei putere astfel încât

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\frac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha}}\Bigg|_{z=0} = 1.$$

Logaritmând relaţia obţinem:

$$\ln g(z) = \ln z + \frac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha}(\ln f(z) - \ln z).$$

Deribând şi înmulţind cu z avem:

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = 1 + \frac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha}\left(\frac{zf'(z)}{z} - 1\right)$$

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = 1 - \frac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha} + \frac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha}\cdot\frac{zf'(z)}{f(z)}$$

$$= 1 - \frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha + i\sin\alpha) + \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{zf'(z)}{f(z)}$$

$$= 1 - 1 - i\mathrm{tg}\,\alpha + (1 + i\mathrm{tg}\,\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}.$$

Deci

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = (1 + i\mathrm{tg}\,\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} - i\mathrm{tg}\,\alpha, \quad z \in U$$

şi

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zg'(z)}{g(z)}\right] = \mathrm{Re}\left[(1 + i\mathrm{tg}\,\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha}\cdot\frac{zf'(z)}{f(z)}\right].$$

Dar din Teorema 2.2.3.7 rezultă că

$$\mathrm{Re}\left[e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0$$

şi obţinem că
$$\operatorname{Re}\left[\frac{zg'(z)}{g(z)}\right] > 0.$$

Cum $g(0) = 0$ şi $g'(0) \neq 0$ din Teorema 2.2.1.3 rezultă că $g \in S^*$.

Reciproc, dacă $g \in S^*$ au loc aceleaşi relaţii:
$$\operatorname{Re}\frac{zg'(z)}{g(z)} = \frac{1}{\cos\alpha}\operatorname{Re}\left[e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right].$$

Cum $g \in S^*$ avem tot din Teorema 2.2.1.3 că
$$\operatorname{Re}\frac{zg'(z)}{g(z)} > 0.$$

Rezultă că
$$\operatorname{Re}\left[e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0$$
şi apoi din Teorema 2.2.3.7 avem că $f \in \widehat{S}_\alpha$.

2.3 Rezultate generale din teoria lanţurilor de subordonare diferenţială. Ecuaţia diferenţială Loewner

În cele ce urmează ne vom referi la unele rezultate fundamentale din teoria lanţurilor de subordonare diferenţială.

Reamintim că $f : A \to \mathbb{C}$, A - deschisă, se numeşte analitică pe A dacă $\forall\ a \in A$, $\exists\ U(a,r) \subseteq A$ şi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ convergent în $U(a,r)$ astfel încât
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k,\ \forall\ z \in U(a,r),\ \text{unde } c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

De asemenea reamintim Teorema 1.1.2.6, conform căreia o funcţie $f : A \to \mathbb{C}$, A - deschisă, este olomorfă pe A dacă şi numai dacă f este analitică pe A.

Definiţia 2.3.1. O funcţie $f : U \to \mathbb{C}$ se numeşte funcţie Schwarz dacă $f \in \mathcal{H}(U)$, $f(0) = 0$ şi $|f(z)| < 1$, $\forall\ z \in U$.

Observaţia 2.3.2. Dacă f este funcţie Schwarz, atunci $|f(z)| \leq |z|$, $z \in U$ şi $|f'(0)| \leq 1$. Egalitatea are loc în ambele cazuri dacă şi numai dacă $f(z) = \lambda z$, unde $|\lambda| = 1$.

Definiţia 2.3.3. (Subordonare) Fie $f, g \in \mathcal{H}(U)$. Spunem că f este subordonată funcţiei g dacă există o funcţie Schwarz astfel încât $f = g \circ h$.

În acest caz notăm $f \prec g$.

Proprietatea 2.3.4. Dacă $f \prec g$, atunci $f(0) = g(0)$ şi $g(U) \subseteq g(U)$.

Teorema 2.3.5. *Fie $f, g \in \mathcal{H}(U)$ astfel încât g univalentă în U. Atunci $f \prec g$ dacă şi numai dacă $f(0) = g(0)$ şi $f(U) \subseteq g(U)$.*

Definiţia 2.3.6. (Lanţ de subordonare) Funcţia $f : U \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ este un lanţ de subordonare dacă $f(\cdot, t)$ olomorfă pe U, $f'(0, t)$ continuă, $f'(0, t) \neq 0$, $\forall\ t \geq 0$, $|f'(0, t)|$ strict crescătoare, $f'(0, t) \to \infty$ când $t \to \infty$ şi

$$f(z, s) \prec f(z, t), \quad z \in U,\ 0 \leq s < t < \infty.$$

Observaţia 2.3.7. O definiţie echivalentă ar fi următoarea:

$f : U \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ este un lanţ de subordonare dacă $f(\cdot, t)$ olomorfă pe U, $f(\cdot, t)$ analitică în U, $\forall\ t \geq 0$ şi

$$f(z, s) \prec f(z, t), \quad z \in U,\ 0 \leq s < t < \infty.$$

Definiţia 2.3.8. (Lanţ Loewner) Un lanţ de subordonare $f(z, t)$ se numeşte lanţ Loewner dacă $f(\cdot, t)$ este univalent în U, $\forall\ t \geq 0$.

Observaţia 2.3.9. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că funcţiile din lanţul de subordonare sunt normate în sensul că

$$f(0, t) = 0 \text{ şi } f'(0, t) = e^t,\ \forall\ t \geq 0.$$

Notaţia 2.3.10. Notăm următoarele derivate:

$$f'(z, t) = \frac{\partial f(z, t)}{\partial z}$$

$$\dot{f}(z, t) = \frac{\partial f(z, t)}{\partial t}.$$

Observaţia 2.3.11. Dacă avem un lanţ de subordonare de forma

$$f(z,t) = a_0 + a_1(t)z + a_2(t)z^2 + \dots$$

cu $a_1(t) \neq 0$, $t \geq 0$ şi $\lim\limits_{t\to\infty} |a_1(t)| = \infty$ facem schimbarea de variabilă

$$\tau = \ln\left[\frac{a_1(t)}{a_0(t)}\right].$$

Atunci funcţia $g : U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$,

$$g(z,\tau) = \frac{f(z,\tau) - g(0,\tau)}{a_1(0)}$$

devine un lanţ de subordonare normat.

Într-adevăr:

$$g(0,\tau) = 0 \quad \text{şi} \quad g'(0,\tau) = \frac{f'(0,\tau)}{a_1(0)} = \frac{a_1(t)}{a_1(0)} = e^{\tau}.$$

De asemenea funcţia $h : U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$,

$$h(z,\delta) = f(e^{-i\theta(t)}z,t) - f(0,t) \text{ unde } \theta(t) = \arg f(0,t)$$

şi

$$\delta = \ln|a_1(t)| = \ln|f'(0,t)|$$

este lanţ de subordonare normat.

Într-adevăr $h(0,\delta) = 0$, iar din egalitatea

$$h'(z,\delta) = e^{-i\theta(t)}f'(e^{-i\theta(t)}z,t),$$

rezultă pentru $z = 0$ că

$$h'(0,\delta) = e^{-i\theta(t)}f'(0,t) = e^{-i\theta(t)}|f'(0,t)|e^{i\theta(t)} = |f'(0,t)| = e^{\delta}.$$

În urma acestor observaţii, vom vorbi în continuare doar de lanţuri de subordonare normate, deoarece cazul lanţurilor de subordonare oarecare se reduce după cum am văzut mai sus la cazul celor normate.

Exemplul 2.3.12. Un exemplu de lanţ de subordonare este cel ataşat funcţiei lui Koebe:

$$f(z,t) = e^t \cdot \frac{z}{(1-z)^2} = e^z + 2e^t z^2 + \dots, \quad z \in U.$$

Observaţia 2.3.13. În Capitolul trei vom arăta că $f \in S^*$ dacă şi numai dacă

$$g(z,t) = e^t f(z)$$

este lanţ Loewner.

Teorema 2.3.14. *Fie f un lanţ de subordonare normat şi $0 \leq s \leq t < \infty$. Atunci există o funcţie unică $\varphi : U \times [0,\infty)^2 \to \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathcal{H}(U)$ cu următoarele proprietăţi:*

a) $f(z,s) = f(\varphi(z,s,t),t)$, $z \in U$

b) $\varphi \in \mathcal{H}_u(U)$, $\varphi(0,s,t) = 0$, $|\varphi(z,s,t)| \leq |z|$, $z \in U$ *şi* $\varphi'(0,s,t) = e^{s-t}$

c) $\varphi(z,s,s) = z$, $z \in U$

d) $\varphi(z,s,\tau) = \varphi(\varphi(z,s,t),t,\tau)$, $s \leq t \leq \tau$, $z \in U$

e) $|\varphi(z,u,t) - \varphi(z,u,s)| \leq \dfrac{2|z|(1+|z|)}{1-|z|}(1-e^{s-t})$

f) $|\varphi(z,t,u) - \varphi(z,s,u)| \leq \dfrac{2|z|}{(1-|z|)^2}(1-e^{s-t})$.

Demonstraţie. Existenţa funcţiei φ cu proprietatea a) şi cu proprietăţile $\varphi \in \mathcal{H}_u(U)$ şi $\varphi(0,s,t) = 0$ rezultă din univalenţa funcţiei $f(\cdot,t)$ şi din subordonarea $f(z,s) \prec f(z,t)$ şi anume, mai exact, din faptul că φ va fi funcţie Schwarz.

Din Observaţia 2.3.2 care este cunoscută şi sub numele de inegalitatea lui Schwarz rezultă că

$$|\varphi(z,s,t)| \leq |z|, \quad z \in U.$$

Derivând relaţia $f(z,s) = f(\varphi(z,s,t),t)$ obţinem:

$$f'(z,s) = \varphi'(z,s,t) \cdot f'(\varphi(z,s,t),t)$$

$$f'(0,s) = \varphi'(0,s,t) f'(0,t),$$

adică

$$e^s = \varphi'(0,s,t) \cdot e^t,$$

ceea ce implică

$$\varphi'(0,s,t) = e^{s-t}.$$

Deci au loc şi relaţiile de la b).

În a) luăm $t = s$ şi rezultă

$$f(z,s) = f(\varphi(z,s,s),s),$$

dar φ este unică deci

$$\varphi(z,s,s) = z, \quad z \in U,$$

adică c) are loc.

Au loc egalităţile:

$$f(z,s) = f(\varphi(z,s,t),t) = f(\zeta,t) = \rho(\varphi(\zeta,t,\tau),\tau),$$

unde $\zeta = \varphi(z,s,t)$

$$f(z,s) = f(\varphi(z,s,\tau),\tau)$$

Din unicitatea lui φ rezultă

$$\varphi(z,s,\tau) = \varphi(\zeta,t,\tau) = \varphi(\varphi(z,s,t),t,\tau),$$

deci are loc d).

În continuare, fie $u \geq 0$ fixat, $s,t \in [u,\infty)$ şi $s \leq t$.

Definim funcţia:

$$p_{t_1,t_2} : U \to \mathbb{C}, \quad p_{t_1,t_2}(z) = \begin{cases} \dfrac{1+e^{s-t}}{1-e^{s-t}} \cdot \dfrac{1-\dfrac{v(z,s,t)}{t}}{1+\dfrac{v(z,s,t)}{t}}, & 0 < |z| < 1 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{1+e^{s-t}}{1-e^{s-t}} \cdot \frac{1-\dfrac{v(z,s,t)}{t}}{1+\dfrac{v(z,s,t)}{t}} = \frac{1+e^{s-t}}{1-e^{s-t}} \cdot \frac{1-v'(0,s,t)}{1+v'(0,s,t)}$$
$$= \frac{1+e^{s-t}}{1-e^{s-t}} \cdot \frac{1-e^{s-t}}{1+e^{s-t}} = 1$$

Deci $p_{t_1,t_2} \in \mathcal{H}(U)$.

$$p_{t_1,t_2}(0) = 1 \quad \text{şi} \quad \mathrm{Re}\, p_{t_1,t_2}(0) = 1 > 0$$

$$\mathrm{Re}\, p_{t_1,t_2}(z) = \frac{1+e^{s-t}}{1-e^{s-t}} \cdot \mathrm{Re} \left(\frac{1 = \dfrac{v(z,s,t)}{z}}{1 + \dfrac{v(z,s,t)}{z}} \right) \geq 0,$$

deoarece este funcţie armonică. Din ultimele două relaţii şi aplicând principiul minimului pentru funcţii armonice rezultă că

$$\mathrm{Re}\, p_{t_1,t_2} > 0, \quad z \in U.$$

În concluzie $p_{t_1,t_2} \in \mathcal{P}$ şi din Teorema de deformare a clasei $\mathcal{P}$ 2.2.1.9 avem că

$$|p_{t_1,t_2}(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad z \in U$$

adică

$$\left| \frac{z - v(z,s,t)}{z + v(z,s,t)} \right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \cdot \frac{1-e^{s-t}}{1+e^{s-t}} \leq (1-e^{s-t}) \cdot \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

$$|z - v(z,s,t)| \leq |z + v(z,s,t)| \cdot \frac{1+|z|}{1-|z|}(1-e^{s-t}) \leq (|z| + |v(z,s,t)|) \cdot \frac{1+|z|}{1-|z|}(1-e^{s-t})$$

Obţinem

$$|z - v(z,s,t)| \leq 2|z| \cdot \frac{1+|z|}{1-|z|}(1-e^{s-t}),$$

adică

$$|z - v(z,s,t)| \leq 2r \cdot \frac{1+|z|}{1-|z|}(1-e^{s-t}), \quad 0 \leq r \leq s \leq t, \quad |z| \leq r < 1$$

Ştiind că $|v(z,u,s)| \leq |z|$, $z \in \overline{U(0,1)}$, îl putem înlocui pe z cu $v(z,u,s)$ şi obţinem

$$|v(z,u,s) - v(v(z,u,s),s,t)| \leq 2r \cdot \frac{1+|z|}{1-|z|}(1-e^{s-t}),$$

dar

$$v(v(z,u,s),s,t) = v(z,u,t),$$

deci

$$|v(z,u,s) - v(z,u,t)| \leq \frac{2|z|(1+|z|)}{1-|z|}(1-e^{s-t}).$$

Punctul f) se demonstrează similar cu punctul e).

Teorema 2.3.15. *Fie $f(z,t)$ un lanţ de subordonare normat şi $\varphi = \varphi(z,s,t)$ funcţia sa de tranziţie, $0 \le s \le t < \infty$. Atunci pentru orice $z \in U$, au loc relaţiile:*

(i) $e^t \cdot \dfrac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z,t)| \le e^t \cdot \dfrac{|z|}{(1-|z|)^2}$

(ii) $e^t \cdot \dfrac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |f'(z,t)| \le e^t \cdot \dfrac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$

(iii) $|f(z,t) - f(z,s)| \le \dfrac{8|z|}{(1-|z|)^4}(e^t - e^s)$.

Demonstraţie. Fie funcţia $g(z) = e^{-t} f(z,t)$.

$$g(0) = e^{-t} f(0,t) = 0$$

$$g'(0) = e^{-t} f'(0,t) = e^{-t} \cdot e^t = 1$$

$$g \in \mathcal{H}(U)$$

În concluzie $g \in S$ şi putem aplica teorema de deformare a clasei S.

Din Teorema 2.1.1.14 rezultă:

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |g(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |g'(z)| \le \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$$

adică au loc relaţiile (i) şi (ii).

În continuare fixăm $s \le t$.

Din (ii) obţinem pentru $\zeta \in U$ cu $|\zeta| \le |z|$:

$$|f'(\zeta,t)| \le e^t \cdot \frac{1+|\zeta|}{(1-|\zeta|)^3} \le \frac{2e^t}{(1-|z|)^3}$$

Din inegalitatea lui Schwarz avem că $|\varphi(z,s,t)| \le |z|$, $z \in U$, deci

$$|f(z,t) - f(z,s)| = \left| \int_{\varphi(z,s,t)}^{z} f'(\zeta,t) dt \right| \le \frac{2e^t}{(1-r)^3} |\varphi(z,s,t)|$$

Fie $p : U \to \mathbb{C}$

$$p(z,s,t) = \frac{1+e^{s-t}}{1-e^{s-t}} \cdot \frac{z - \varphi(z,s,t)}{z + \varphi(z,s,t)}.$$

Din raţionamentul din demonstraţia teoremei anterioare, deducem că $p \in \mathcal{P}$ şi aplicând Teorema de deformare 2.2.1.9, obţinem

$$|p(z,s,t)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \leq \frac{1+r}{1-r}, \quad |z| \leq r < 1$$

adică

$$\frac{1+e^{s-t}}{1-e^{s-t}} \cdot \left|\frac{z-\varphi(z,s,t)}{z+\varphi(z,s,t)}\right| \leq \frac{1+r}{1-r}$$

$$|z-\varphi(z,s,t)| \leq \frac{1-e^{s-t}}{1+e^{s-t}} \cdot \frac{1+r}{1-r}|z+\varphi(z,s,t)|.$$

Dar

$$|z+\varphi(z,s,t)| \leq |z| + |\varphi(z,s,t)| \leq |z| + |z| \leq 2r.$$

Deci

$$|z-\varphi(z,s,t)| \leq 2r \cdot \frac{1+r}{1-r}(1-e^{s-t}).$$

În concluzie obţinem

$$|f(z,t)-f(z,s)| \leq \frac{2e^t}{(1-r)^3} \cdot 2r \cdot \frac{1+r}{1-r}(1-e^{s-t})$$

$$|f(z,t)-f(z,s)| \leq \frac{4r(1+r)}{(1-r)^4}(e^t-e^s) \leq \frac{8r}{(1-r)^4}(e^t-e^s)$$

Deci (iii) are loc.

Teorema 2.3.16. *Pentru orice $f \in S$, există un lanţ de subordonare normat g astfel încât*

$$g(z,0) = f(z), \quad z \in U.$$

Teorema 2.3.17. *Fie $p = p(z,t) : U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ astfel încât $p(\cdot,t) \in \mathcal{P}$, $t \geq 0$ şi $p(z,\cdot)$ este măsurabilă pe $[0,\infty)$, $\forall\ z \in U$.*

Atunci pentru fiecare $z \in U$, $s \geq 0$, problema cu valori iniţiale

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -vp(v,t) \ \text{a.p.t. } t \in [s,\infty), \quad v(z,s,s) = z,$$

are o soluţie unică local Lipschitz continuă în $t \geq s$,

$$v(t) = v(z,s,t) = e^{s-t}z + \dots$$

Funcţiile $v(\cdot, s, t)$ sunt funcţii Schwarz univalente, $0 \le s \le t < \infty$ şi pentru orice $s \ge 0$ există limita următoare local uniformă pe U:

$$f(z,s) = \lim_{t \to \infty} e^t v(z,s,t).$$

În plus $f(\cdot, s)$ este univalentă şi

$$f(v(z,s,t),t) = f(z,s), \ \forall\ z \in U, \ s \le t < \infty.$$

Astfel funcţia $f : U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ definită mai sus este lanţ Loewner şi satisface ecuaţia diferenţială:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = z \cdot p(z,t) \cdot f'(z,t) \ \text{a.p.t. } t \in [0,\infty), \ \forall\ z \in U.$$

Teorema 2.3.18. *Fie funcţia $f : U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ astfel încât $f(0,t) = 0$, $f'(0,t) = e^t$, $t \ge 0$. Atunci f este un lanţ Loewner dacă şi numai dacă au loc următoarele proprietăţi:*

(i) $\exists\ r \in (0,1)$, $\exists\ M > 0$ constantă astfel încât $f(z,t)$ este olomorfă pe $U(0,r)$ pentru orice $t \ge 0$, local Lipschitz continuă în $t \in [0,\infty)$ pentru orice $z \in U(0,r)$ şi are loc relaţia:

$$|f(z,t)| \le Me^t, \quad z \in U(0,r), \ t \ge 0.$$

(ii) $\exists\ p(z,t)$ astfel încât $p(\cdot,t) \in \mathcal{P}$ pentru orice $t \ge 0$, $p(z,\cdot)$ este măsurabilă pe $[0,\infty)$ pentru orice $z \in U$ şi este verificată ecuaţia diferenţială

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = zf'(z,t) \cdot p(z,t), \ \text{a.p.t. } t \ge 0, \ z \in U(0,r).$$

(iii) Pentru orice $t \ge 0$, $f(\cdot,t)$ este prelungirea analitică pe U a restricţiei $f(\cdot,t)_{U(0,r)}$.

Demonstraţie. Presupunem mai întâi că f este lanţ Loewner. Din Teorema 2.3.15 avem că

$$|f(z,t)| \le e^t \cdot \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \le e^t \cdot \frac{r}{(1-r)^2}, \quad z \in U(0,r)$$

iar

$$|f'(z,t)| \le e^t \cdot \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} \le e^t \cdot \frac{1+r}{(1-r)^3}, \quad t \in U(0,r)$$

deci f este local Lipschitz continuă în $t \geq 0$.

Atunci există $\dfrac{\partial f}{\partial t}(z,t)$ a.p.t. cu $t \in [0,\infty)$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(z,t)$ este măsurabilă Lebesgue pe $[0,\infty)$ şi are loc relaţia

$$f(z,t_2) - f(z,t_1) = \int\limits_{[t_1,t_2]} \frac{\partial f}{\partial t}(z,t)d\lambda(t) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial t}(z,t)dt$$

Fie $0 \leq s \leq t < \infty$ şi $\varphi(z,s,t)$ funcţia de tranziţie a lanţului $f(z,t)$.

Alegem $t \in [0,\infty)$ astfel încât să existe

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) := \dot{f}(z,t), \quad z \in U.$$

Fie $z \in U$, atunci pentru $w = \varphi(z,s,t)$

$$f(z,s) - f(z,t) = f(\varphi(z,s,t),t) - f(z,t) = f(w,t) - f(z,t)$$

$$= f(z,t) + f'(z,t)(w-z) + \ldots - f(z,t)$$

$$= f'(z,t)(\varphi(z,s,t) - z) + R(\varphi(z,s,t),z)$$

unde $\lim\limits_{y\to z} \dfrac{R(y,z)}{|y-z|} = 0$.

Deci

$$\frac{f(z,s) - f(z,t)}{s-t} = f'(z,t) \cdot \frac{\varphi(z,s,t) - z}{s-t} + \frac{R(\varphi(z,s,t),z)}{s-t}$$

$$\lim_{s\nearrow t} \varphi(z,s,t) = \varphi(z,t,t) = z.$$

Trecând la limită în relaţia anterioară obţinem

$$\dot{f}(z,t) = f'(z,t) \cdot \lim_{s\nearrow t} \frac{\varphi(z,s,t) - z}{s-t} + \lim_{s\nearrow t} \frac{R(\varphi(z,s,t),z)}{s-t}$$

$$\lim_{s\nearrow t} \frac{R(\varphi(z,s,t),z)}{s-t} = \lim_{s\nearrow t} \frac{R(\varphi(z,s,t),z)}{|\varphi(z,s,t) - z|} \cdot \frac{|\varphi(z,s,t) - z|}{s-t}$$

$$\frac{|\varphi(z,s,t) - z|}{|s-t|} = \frac{\varphi(z,s,t) - \varphi(z,t,t)}{t-s} \leq \frac{2|z|}{(1-|z|)^2}(1-e^{s-t})\frac{1}{t-s}$$

conform Teoremei 2.3.14.

Ştim că $1 - e^{-x} \leq x$, $x \geq 0$, deci

$$1 - e^{s-t} \leq t - s.$$

Rezultă că

$$\frac{\varphi(z,s,t)-z|}{|s-t|} \leq \frac{2|z|}{(1-|z|)^2},$$

deci e mărginit. Atunci

$$\lim_{s\nearrow t} \frac{R(\varphi(z,s,t),z)}{s-t} = 0$$

şi

$$\dot{f}(z,t) = f'(z,t) \cdot \lim_{s\nearrow t} \frac{\varphi(z,s,t)-z}{s-t}$$

Fie $h(z,t)$ astfel încât

$$h(z,t) = \lim_{s\nearrow t} \frac{\varphi(z,s,t)-z}{s-t}.$$

Avem că $h(\cdot,t) \in \mathcal{H}(U)$, $h(0,t)=0$ şi $h'(0,t)=1$ prin calcul

$$\operatorname{Re}\left[\frac{h(z,t)}{z}\right] = \lim_{s\nearrow t} \operatorname{Re}\left[\frac{\varphi(z,s,t)}{z} - 1\right] \cdot \frac{1}{s-t}$$

$$|\varphi(z,s,t)| \leq |z|$$

din inegalitatea lui Schwarz, deci

$$\frac{\varphi(z,s,t)}{z} - 1 \leq 0$$

iar $s-t \leq 0$ şi obţinem că

$$\operatorname{Re}\left[\frac{h(z,t)}{z}\right] \geq 0, \quad z \in U \setminus \{0\}$$

Fie funcţia $p(z,t)$ definită prin:

$$p(z,t) = \begin{cases} \dfrac{h(z,t)}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{h(z,t)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{h'(z,t)}{1} = 1$$

Deci $p(\cdot,t) \in \mathcal{H}(U)$, $t \geq 0$

$$\operatorname{Re} p(z,t) \geq 0, \quad z \neq 0 \quad \text{şi} \quad p(0,t) = 1.$$

Din principiul minimului pentru funcţii armonice rezultă că

$$\operatorname{Re} p(z,t) > 0, \quad z \in U.$$

În concluzie $p(\cdot,t) \in \mathcal{P}$.

În limita prin care este definită funcţia h are loc convergenţa uniformă pe compacte a unui şir de funcţii măsurabile, deci $p(z,\cdot)$ este măsurabilă. Deci

$$\dot{f}(z,t) = f'(z,t) \cdot zp(z,t) \text{ a.p.t. } t \in [0,\infty), \ \forall \ z \in U$$

şi toate cele trei condiţii din teoremă sunt îndeplinite.

Reciproc, presupunem că sunt adevărate cele trei condiţii şi demonstrăm că $f(z,t)$ este un lanţ Loewner.

Avem că $f(\cdot,t) \in \mathcal{H}(U)$, $f(0,t) = 0$ şi $f'(0,t) = e^t$, $t \geq 0$.

$p(\cdot,t) \in \mathcal{P}$, $t \geq 0$ şi $p(z,\cdot)$ este măsurabilă pe $[0,\infty)$, $\forall \ z \in U$.

Atunci, din Teorema 2.3.17, pentru fiecare $z \in U$, $s \geq 0$ fixat ecuaţia diferenţială

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -vp(v,t) \text{ a.p.t. } t \geq s$$

cu condiţia iniţială $v(z,s,s) = z$ are o soluţie unică local Lipschitz continuă în $t \geq s$, iar $v(\cdot,s,t)$ este funcţie Schwarz univalentă şi

$$v'(0,s,t) = e^{s-t}, \quad t \geq s \geq 0.$$

Notăm cu g funcţia $g(z,s,t) = f(v(z,s,t),t)$, $t \geq s \geq 0$, $z \in U$ şi demonstrăm că $g(z,s,\cdot)$ este constantă pe $[s,\infty)$, $\forall \ z \in U$. Deoarece $v(z,s,\cdot)$ este Lipschitz pe $[s,\infty)$, $\forall \ z \in U$ şi $f(z,\cdot)$ este local Lipschitz pe $[0,\infty)$, $\forall \ z \in U$, avem că $g(z,s,\cdot)$ este local Lipschitz, ca şi compunere de funcţii pe $[s,\infty)$. Deci există $\dfrac{\partial g}{\partial t}(z,s,t)$ a.p.t. $t \geq s$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(z,s,t) = \frac{\partial f}{\partial z}(v(z,s,t),t) \cdot \frac{\partial v}{\partial t}(z,s,t) + \frac{\partial f}{\partial t}(v(z,s,t),t).$$

Folosind ipoteza (ii) obţinem:

$$\frac{\partial g}{\partial t}(z,s,t) = \frac{\partial f}{\partial z}(v(z,s,t),t) \cdot \frac{\partial v}{\partial t}(z,s,t) + v(z,s,t) \cdot f'(v(z,s,t),t) \cdot p(v(z,s,t),t)$$

dar din Teorema 2.3.17 ştim că

$$\frac{\partial v}{\partial t}(z,s,t) = -v(z,s,t)\cdot p(v(z,s,t),t)$$

şi se obţine că

$$\frac{\partial g}{\partial t}(z,s,t) = 0 \text{ a.p.t. } t \geq s,\ \forall\ z \in U.$$

Dar g fiind Lipschitz, este continuă şi are loc relaţia

$$g(z,s,t) = g(z,s,s),$$

adică

$$f(v(z,s,t),t) = f(v(z,s,s),s) = f(z,s)$$

Demonstrăm în continuare că $f(\cdot,t)$ este univalentă pe U, $\forall\ t \geq 0$. Din ipoteză avem că

$$|e^{-t}f(z,t)| \leq M, \quad z \in U(0,r), \quad t \geq 0.$$

Fie $t \geq 0$ fixat şi definim funcţia

$$h_t(z) = e^{-t}f(z,t) - z.$$

Atunci $h_t \in \mathcal{H}(U)$

$$h_t(0) = e^{-t}f(0,t) - 0 = 0$$

$$h_t'(0) = e^{-t}f'(0,t) - 1 = e^{-t}\cdot e^{t} - 1 = 0$$

$$|h_t(z)| = |e^{-t}f(z,t) - z| \leq |e^{-t}f(z,t)| + |z| \leq M + r = M^*(r), \quad z \in U(0,r)$$

unde $M^*(r) = M + r$ prin notaţie.

Din Lema lui Schwarz 1.1.17.(ii) deducem că

$$|g_t(z)| \leq \frac{M^*(r)}{r^2}\cdot |z|^2$$

adică

$$|e^{-t}f(z,t) - z| \leq \frac{M^*r)}{r^2}|z|^2, \quad z \in U(0,r)$$

Înlocuind în inegalitate pe z cu $v(z,s,t)$ care este tot din $U(0,r)$ datorită inegalităţii $|v(z,s,t)| \le |z|$, obţinem:

$$|e^{-t}f(v(z,s,t),t) - v(z,s,t)| \le \frac{M^*(r)}{r^2}|v(z,s,t)|^2$$

$$|f(v(z,s,t),t) - e^t v(z,s,t)| \le \frac{M^*(r)}{r^2}|v(z,s,t)|^2 e^t$$

Ştim că $v(\cdot,s,t) \in \mathcal{H}_u(U)$ şi $v'(0,s,t) = e^{s-t}$, deci $e^{t-s}\cdot v(\cdot,s,t) \in S$.

Aplicând teorema de deformare a clasei S 2.1.1.14 obţinem

$$|e^{t-s}\cdot v(z,s,t)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \le \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Revenind la inegalitatea anterioară

$$|f(v(z,s,t),t) - e^t v(z,s,t)| \le \frac{M^*(r)}{r^2}\cdot\frac{r^2}{(1-r)^4}\cdot e^{2(s-t)}\cdot e^t$$

$$|f(v(z,s,t),t) - e^t v(z,s,t)| \le \frac{M^*(r)}{(1-r)^4}\cdot e^{2s}\cdot e^{-t}.$$

Trecând la limită cu $t \to \infty$ se observă că partea dreaptă a inegalităţii tinde la 0 şi din Teorema lui Cauchy avem că

$$e^t v(z,s,t) \overset{u.}{\rightrightarrows} f(v(z,s,t),t) \text{ pe } \overline{U}(0,r)$$

Am demonstrat anterior că $f(v(z,s,t),t) = f(z,s)$, deci

$$e^t v(z,s,t) \overset{u.}{\rightrightarrows} f(z,s) \text{ pe } \overline{U(0,r)}$$

Dar convergenţa uniformă are loc $\forall\ r \in (0,1)$, deci

$$e^t v(z,s,t) \overset{u.c.}{\rightrightarrows} f(z,s),$$

adică

$$\lim_{k\to\infty} e^{t_k}v(z,s,t_k) = f(z,s), \quad \{t_k\}_{k\in\mathbb{N}},\ t_k \in [s,\infty)$$

În plus ştim că $e^{t_k}v(z,s,t_k) \in \mathcal{H}_u(U)$ şi din Teorema lui Hurwitz 1.1.57 obţinem că $f(\cdot,s) \in \mathcal{H}_u(U)$ sau $f(\cdot,s)$ este constantă. Dar

$$f(0,s) = \lim_{k\to\infty} e^{t_k}v(0,s,t_k) = 0$$

$$f'(0,s) = \lim_{k\to\infty} e^{t_k} v'(0,s,t_k) = \lim_{k\to\infty} e^{t_k} \cdot e^{s-t_k} = e^s \neq 0,$$

deci $f(\cdot, s)$ nu poate fi constantă.

Prin urmare $f(\cdot, s)$ este univalentă pe U.

În concluzie am demonstrat că $f(\cdot, s) \in \mathcal{H}_u(U)$ şi

$$f(z,s) = f(v(z,s,t),t),$$

deci rezultă că $f(z,t)$ este lanţ Loewner.

Capitolul 3

Aplicaţii

În acest capitol vom prezenta câteva aplicaţii interesante ale noţiunii de lanţ Loewner. În acest sens vom demonstra criteriul de univalenţă al lui J. Becker şi vom prezenta caracterizările analitice ale stelarităţii, convexităţii şi spiralităţii folosind teoria lanţurilor Loewner. Ultimele două secţiuni se referă la alte condiţii de univalenţă pentru funcţii olomorfe. În secţiunea 3.3 vom prezenta câteva condiţii necesare şi suficiente de univalenţă pentru funcţii olomorfe pe discul unitate, folosind metrica hiperbolică pe U. În ultima secţiune vom prezenta alte condiţii suficiente de univalenţă pentru funcţii olomorfe pe domenii convexe în $\mathbb{C}$. Sursele principale bibliografice pe care le-am utilizat în alcătuirea acestui capitol sunt [GK], [MBS], [Po], [KiMi] şi [Ja].

3.1 Condiţii de injectivitate globală prin metoda lanţurilor Loewner

În această secţiune demonstrăm criteriul de univalenţă al lui J. Becker şi vom prezenta fără demonstraţie criteriul de univalenţă al lui Ahlfors-Becker.

Primul rezultat din această secţiune aparţine lui Becker (a se vedea de exemplu [GK]).

Teorema 3.1.1. *Fie $f : U \to \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$, astfel încât $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 1$. Dacă este verificată inegalitatea:*

$$(1 - |z|^2)\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| < 1, \quad z \in U,$$

atunci f este univalentă pe U.

Demonstraţie. Fie funcţia

$$f(z,t) = f(e^{-t}z) + (e^t - e^{-t})zf'(e^{-t}z), \quad z \in U,\ t \in [0,\infty).$$

Arătăm că $f(z,t)$ este lanţ Loewner.

Avem că

$$f(\cdot,t) \in \mathcal{H}(U), \quad t \geq 0$$

$$f(0,t) = f(0) = 0, \quad t \geq 0$$

$$f'(0,t) = e^{-t}f'(0) + (e^t - e^{-t})f'(0) = e^t f'(0) = e^t, \quad t \geq 0$$

Observăm că $f(z,\cdot) \in C^\infty([0,\infty))$, $\forall\ z \in U$, deci $f(z,\cdot)$ este local Lipschitz pe $[0,\infty)$, $\forall\ z \in U$

$$e^{-t}f(z,t) = e^{-t}f(e^{-t}z) + zf'(e^{-t}z) - e^{-2t}zf'(e^{-t}z)$$

Avem că

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t}f(e^{-t}z) = 0$$

şi

$$\lim_{\to\infty} e^{-2t}zf'(e^{-t}z) = 0.$$

Atunci

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t}f(z,t) = \lim_{t\to\infty} zf'(e^{-t}z) = z$$

local uniform pe U, deci $e^{-t_k}f(z,t_k) \overset{u.c.}{\rightrightarrows}$ pentru $k \to \infty$, $\forall\ \{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ cu $t_k \in [0,\infty)$, $t_k \to \infty$.

Din Teorema lui Montel 1.1.31 rezultă că $\{e^{-t}f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este o familie local uniform mărginită pe U.

Deducem deci că pentru orice $r \in (0,1)$ există $M = M(r) > 0$ astfel încât

$$|e^{-t}f(z,t)| \le M(r), \quad |z| \le r,\ t \ge 0,$$

adică

$$|f(z,t)| \le M(r)e^t, \quad |z| \le r,\ t \ge 0$$

Astfel este îndeplinită condiţia (i) din Teorema 2.3.18.

Verificăm în continuare condiţia (ii), deoarece (iii) este evident adevărată.

Avem că

$$\dot{f}(z,t) = -e^{-t}zf'(e^{-t}z) + (e^t + e^{-t})zf'(e^{-t}z) + (e^t - e^{-t})z(-e^{-t}z)f''(e^{-t}z)$$

adică

$$\dot{f}(z,t) = e^t zf'(e^{-t}z) - (1 - e^{-2t})z^2 f''(e^{-t}z)$$

iar

$$zf'(z,t) = ze^{-t}f'(e^{-t}z) + (e^t - e^{-t})zf'(e^{-t}z) + (e^t - e^{-t})z^2e^{-t}f''(e^{-t}z)$$

adică

$$zf'(z,t) = e^t zf'(e^{-t}z) + (1 - e^{-2t})z^2 f''(e^{-t}z).$$

Notând cu

$$A(z,t) = -(1 - e^{-2t})e^{-t}z \cdot \frac{f''(e^{-t}z)}{f'(e^{-t}z)},$$

expresia devine:

$$zf'(z,t) = e^t zf'(e^{-t}z)(1 - A(z,t))$$

Pentru orice $z \in U$ avem că

$$1 - e^{-2t} < 1 - |e^{-t}z|^2$$

şi din ipoteză ştim că

$$(1 - |z|^2)\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \le 1, \quad z \in U.$$

Astfel deducem că

$$|A(z,t)| < 1.$$

Prin urmare $f'(z,t) \neq 0$ pentru orice $z \in U$, $t \geq 0$.

Definim funcţia $p(z,t)$ prin

$$p(z,t) = \frac{\dot{f}(z,t)}{zf'(z,t)}, \quad z \in U,\ t \in [0,\infty)$$

şi înlocuind expresiile calculate anterior obţinem că

$$p(z,t) = \frac{1 + A(z,t)}{1 - A(z,t)}, \quad z \in U,\ t \in [0,\infty).$$

Observăm că $p(0,t) = 1$, $p(z,\cdot)$ este măsurabilă pe $[0,\infty)$ şi $p(\cdot,t)$ este olomorfă pe U.

Prin calcul se deduce că $\operatorname{Re} p(z,t) > 0$, $|z| < 1$, $t \in [0,\infty)$, deci $p(\cdot,t) \in \mathcal{P}$.

Deci sunt îndeplinite toate condiţiile Teoremei 2.3.18 şi rezultă că $f(z,t)$ este lanţ Loewner.

În concluzie f fiind primul element din lanţ este univalentă pe U.

Prezentăm în continuare rezultatul lui Ahlfors şi Becker (a se vedea, de exemplu, [GK]).

Teorema 3.1.2. *Fie $f : U \to \mathbb{C}$ astfel încât $f \in \mathcal{H}(U)$, $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 1$ şi fie $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $|c| \leq 1$ şi $\gamma \neq -1$.*

Dacă

$$\left|(1 - |z|^2) \cdot \frac{zf''(z)}{f'(z)} + \gamma |z|^2\right| \leq 1, \quad z \in U,$$

atunci f este univalentă pe U.

Demonstraţia se face analog cu demonstraţia Teoremei 3.1.1, arătând că

$$f(z,t) = f(e^{-t}z) + \frac{1}{1+\gamma}(e^t - e^{-t})zf'(e^{-t}z)$$

este un lanţ de subordonare univalent (lanţ Loewner).

3.2 Caracterizările analitice ale unor subclase de funcţii univalente prin metoda lanţurilor Loewner

În această secţiune vom prezenta caracterizările analitice ale stelarităţii, spiralităţii şi convexităţii, folosind metoda lanţurilor Loewner.

Teorema 3.2.1. *Fie $f \in \mathcal{H}(U)$ astfel încât $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 1$. Atunci $f \in S^*$ dacă şi numai dacă $g(z,t) = e^t f(z)$ este lanţ Loewner.*

Demonstraţie. Presupunem mai întâi că $f \in S^*$.

Avem că $f \in \mathcal{H}_u(U)$ şi rezultă că $g(\cdot, t) \in \mathcal{H}_u(U)$, $t \geq 0$

$$g(0,t) = e^t f(0) = 0, \quad t \geq 0$$

$$g'(0,t) = e^t f'(0) = e^t, \quad t \geq 0$$

Trebuie să mai arătăm subordonarea $g(z,s) \prec g(z,t)$ care din Teorema 2.3.5 este echivalentă cu $h(U,s) \subseteq g(U,t)$, adică

$$e^s f(U) \subseteq e^t f(U).$$

Ultima relaţie este echivalentă cu $e^{s-t} f(U) \subseteq f(U)$, ceea ce evident are loc $\forall\ t \geq s \geq 0$, datorită faptului că f este o funcţie stelată şi $e^{s-t} \in (0,1]$.

Deci $g(z,t)$ este lanţ Loewner.

Reciproc, presupunem că g este un lanţ Loewner.

Avem că $g(\cdot,t) \in \mathcal{H}_u(U)$, $\forall\ t \geq 0$.

Pentru $t = 0$ rezultă că $f \in \mathcal{H}_u(U)$.

Ştim că $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 1$, deci rezultă că $f \in S$.

Avem că $g(z,s) \prec g(z,t)$, $t \geq s \geq 0$, $t \in U$.

Pentru $s = 0$ obţinem $g(z,0) = f(z) \prec e^t f(z)$ care este echivalent cu $f(U) \subseteq e^t f(U)$, adică $e^{-t} f(U) \subseteq f(U)$, $\forall\ t \geq 0$. Dacă luăm un $\lambda \in (0,1]$ oarecare, există un $t \geq 0$ astfel încât $\lambda = e^{-t}$ şi din relaţia anterioară ştim că $\lambda f(U) \subseteq f(U)$. Deducem deci că $f(U)$ este un domeniu stelat şi în concluzie $f \in S^*$.

Teorema 3.2.2 (Caracterizarea analitică a stelarităţii) *Fie* $f \in \mathcal{H}(U)$ *astfel încât* $f(0) = 0$ *şi* $f'(0) = 1$. *Atunci* $f \in S^*$ *dacă şi numai dacă*

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0, \quad z \in U.$$

Demonstraţie. Presupunem că $f \in S^*$. Atunci din Teorema 3.2.1 avem că $g(z,t) = e^t f(z)$ este lanţ Loewner.

Din Teorema 2.3.18 avem că $\exists\, p = p(z,t) : U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ astfel încât $p(\cdot,t) \in \mathcal{P}$, $t \geq 0$, $p(z,\cdot)$ este măsurabilă pe $[0,\infty)$, $\forall\, z \in U$ şi are loc relaţia:

$$\dot{g}(z,t) = zg'(z,t)p(z,t) \text{ a.p.t. } t \geq 0,\ z \in U$$

dar

$$g(z,t) = e^t f(z)$$

şi

$$\dot{g}(z,t) = e^t f(z)$$

$$g'(z,t) = e^t f'(z)$$

Deci are loc relaţia

$$e^t f(z) = ze^t f'(z)p(z,t)$$

adică

$$p(z,t) = \frac{f(z)}{zf'(z)}$$

Cum $p(\cdot,t) \in \mathcal{P}$, $t \geq 0$ rezultă că

$$\mathrm{Re}\left[\frac{f(z)}{zf'(z)}\right] > 0, \quad z \in U.$$

Dar dacă partea reală a unui număr este pozitivă, atunci şi partea reală a inversului său este pozitivă, adică

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0, \quad z \in U.$$

Reciproc, presupunem că are loc relaţia

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0, \quad z \in U$$

Luăm funcţia $g(z,t) = e^t f(z)$, $t \geq 0$, $z \in U$.

Avem că $g(\cdot,t) \in \mathcal{H}(U)$

$$g(0),t) = e^t f(0) = 0$$

$$g'(0,t) = e^t f'(0) = e^t$$

$$g(z,\cdot) \in C^\infty([0,\infty))$$

şi atunci $g(z,\cdot)$ este local Lipschitz pe $[0,\infty)$, $\forall\ z \in U$.

Cum $f \in \mathcal{H}(U)$ rezultă că f este mărginită uniform pe $\overline{U}(0;r)$ pentru orice $r \in (0,1)$, adică

$$|f(z)| \leq M(r), \quad |z| ler$$

cu $M(r)$ o constantă ce depinde doar de r. Atunci

$$|e^{-t}g(z,t)| \leq M(r), \quad |z| \leq r$$

$$|g(z,t)| \leq e^t M(r)$$

Fie

$$p(z,t) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{zf'(z)}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

Din ipoteză ştim că $\mathrm{Re}\left[\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0$, rezultă că

$$\mathrm{Re}\left[\frac{f(z)}{zf'(z)}\right] > 0$$

şi putem deduce că $p(\cdot,t) \in \mathcal{P}$.

$p(z,\cdot)$ este constantă, deci este măsurabilă pe $[0,\infty)$.

$$\dot{g}(z,t) = e^t f(z)$$

$$g'(z,t) = e^t f'(z)$$

Atunci

$$zg'(z,t)p(z,t) = ze^t f'(z) \cdot \frac{f(z)}{zf'(z)} = e^t f(z) = \dot{g}(z,t), \quad z \in U \setminus \{0\},\ t \geq 0$$

iar pentru $z = 0$

$$\dot{g}(0,t) = 0 = 0 \cdot g'(0,t)p(0,t).$$

Deci este verificată relaţia

$$zg'(z,t)p(z,t) = \dot{g}(z,t),\ \forall\ t \geq 0,\ z \in U.$$

Atunci toate condiţile din Teorema 2.3.18 sunt verificate şi rezultă că $g(z,t)$ este lanţ Loewner, iar din Teorema 3.2.1 rezultă că $f \in S^*$.

În continuare prezentăm legătura dintre noţiunile de spiralitate de tipul α şi lanţurile Loewner.

Teorema 3.2.3. *Fie $f : U \to \mathbb{C}$ astfel încât $f \in \mathcal{H}(U)$, $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 1$ şi fie $\alpha \in \mathbb{R}$ cu $|\alpha| < \dfrac{\pi}{2}$. Atunci f este o funcţie spiralată de tip α dacă şi numai dacă*

$$g : U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}, \quad g(z,t) = e^{(1-i\operatorname{tg}\alpha)t} f(e^{i\operatorname{tg}\alpha\cdot t}z), \quad z \in U,\ t \geq 0$$

este lanţ Loewner.

Demonstraţie. Presupunem mai întâi că f este o funcţie spiralată de tip α. Atunci $f \in \mathcal{H}_u(U)$ şi

$$f(z) \prec e^{(1-i\operatorname{tg}\alpha)t} f(z), \quad z \in U,\ t \in [0,\infty).$$

Fie

$$\varphi(z,s,t) = e^{-i\operatorname{tg}\alpha\cdot t} f^{-1}\left(e^{-\frac{e^{-i\operatorname{tg}\alpha}}{\cos\alpha}(t-s)} f(e^{i\operatorname{tg}\alpha\cdot s}z)\right), \quad z \in U,\ 0 \leq s \leq t < \infty.$$

Funcţia f fiind spiralată de tip α, φ este bine definită.

Avem că $\varphi(0,s,t) = 0$ şi $|\varphi(z,s,t)| < 1$, $z \in U$, $0 \leq s \leq t < \infty$, deci φ este funcţie Schwarz. Observăm că:

$$g(z,s) = g(v(z,s,t),t), \quad z \in U,\ 0 \leq s \leq t < \infty.$$

Prin urmare g este un lanţ de subordonare.

Avem că $g(\cdot,t) \in \mathcal{H}_u(U)$, $t \in [0,\infty)$, deoarece $f \in \mathcal{H}_u(U)$, iar

$$g(0,t) = e^{(1-i\operatorname{tg}\alpha)t} f(0) = 0$$

şi

$$g'(0,t) = e^{(1-i\operatorname{tg}\alpha)t} e^{i\operatorname{tg}\alpha\cdot t} f'(0) = e^t.$$

În concluzie $g(z,t)$ este lanţ Loewner.

Reciproc, presupunem că $g(z,t)$ este lanţ Loewner. Atunci avem $f \in \mathcal{H}_u(U)$ şi

$$f(z) \prec g(z,t) \prec e^{(1-i\operatorname{tg}\alpha)t} f(z),\ \forall\ z \in U,\ t \in [0,\infty),$$

ceea ce implică

$$e^{-e^{-i\alpha} - \frac{t}{\cos\alpha}} f(z) \in f(U), \quad z \in U,\ t \in [0,\infty).$$

Prin urmare, f este spiralată de tip α. Demonstraţia este încheiată.

Acum putem prezenta teorema de caracterizare analitică a spiralităţii, folosind metoda lanţurilor Loewner.

Teorema 3.2.4. *Fie $f : U \to \mathbb{C}$ astfel încât $f \in \mathcal{H}(U)$, $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 1$ şi fie $\alpha \in \mathbb{R}$ cu $|\alpha| < \dfrac{\pi}{2}$. Atunci f este o funcţie spiralată de tip α dacă şi numai dacă are loc relaţia:*

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\alpha} \cdot \frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0, \quad z \in U.$$

Demonstraţia se face pe baza unui raţionament analog cu cel din demonstraţia Teoremei 3.2.2 şi anume arătând că funcţia $g : U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$, definită prin

$$g(z,t) = e^{(1-i\operatorname{tg}\alpha)t} f(e^{i\operatorname{tg}\alpha\cdot t} z),$$

este lanţ Loewner şi folosind Teorema 3.2.3.

Teorema 3.2.5. *Fie $f : U \to \mathbb{C}$ astfel încât $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 1$. Atunci $f \in K$ dacă şi numai dacă funcţia $g : U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ definită prin*

$$g(z,t) = f(z) + (e^t - 1)zf'(z), \quad z \in U,\ t \in [0,\infty)$$

este un lanţ Loewner.

Pentru a demonstra implicaţia directă se utilizează din nou Teorema 2.3.18.

Reciproc, presupunem că $g(z,t)$ este un lanţ Loewner. Atunci din Teorema 2.3.18 deducem că există o funcţie $p(z,t)$ astfel încât $p(\cdot,t) \in \mathcal{P}$, $t \in [0,\infty)$, $p(z,\cdot)$ este măsurabilă pe $[0,\infty)$ şi

$$\dot{g}(z,t) = zg'(z,t)p(z,t).$$

Un calcul elementar ne conduce la expresia funcţiei $p(z,t)$:

$$p(z,t) = \frac{\dot{g}(z,t)}{zg'(z,t)}, \quad z \in U,\ t \in [0,\infty).$$

Rezultă că

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\dot{g}(z,t)}{zg'(z,t)}\right] > 0, \quad z \in U,\ t \in [0,\infty)$$

şi obţinem

$$\mathrm{Re}\left[1 + (1-e^{-t})\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > 0, \quad z \in U,\ t \in [0,\infty).$$

Dacă trecem la limită în această inegalitate pentru $t \to \infty$, obţinem că

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \geq 0, \quad z \in U.$$

Folosind principiul minimului pentru funcţii armonice (a se vedea [KM]) şi faptul că funcţia

$$h : U \to \mathbb{C}, \quad h(z) = \mathrm{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]$$

este armonică, $h(0) = 1$, rezultă din relaţia anterioară că $h(z) > 0$, $z \in U$. Deci $f \in K$.

3.3 Condiţii necesare şi suficiente de univalenţă pentru funcţii olomorfe pe discul unitate

În această secţiune vom prezenta trei criterii de univalenţă pentru funcţii olomorfe pe U, folosind metirca hiperbolică. Aceste rezultate au fost obţinute de Kim şi Minda.

Reamintim că am definit în primul capitol metrica hiperbolică d_h prin

$$d_h(a,b) = \operatorname{arctg} h \left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|, \quad a,b \in U,$$

relaţie care se scrie echivalent:

$$d_h(a,b) = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|}{1-\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|}\right], \quad a,b \in U.$$

Pentru metrica hiperbolică are loc următoarea proprietate:

Proprietatea 3.3.1. $d_h(f(a), f(b)) \leq d_h(a, b),\ \forall\ a, b \in U,\ \forall\ f \in \mathcal{H}(U)$ cu $f(U) \subseteq U$. Egalitatea în inegalitate are loc dacă şi numai dacă f este un automorfism al discului unitate, adică $f(U) = U$ şi $f \in \mathcal{H}_u(U)$.

Următorul rezultat obţinut de Kim şi Minda [KiMi] prezintă o condiţie necesară şi suficientă de univalenţă pentru funcţii olomorfe pe discul unitate.

Teorema 3.3.2. *Fie $f : U \to \mathbb{C}$ astfel încât $f \in \mathcal{H}_u(U)$ şi fie $a, b \in U$. Atunci*

$$|f(a) - f(b)| \geq \frac{\operatorname{sh}(2d_h(a,b))}{2e^{2d_h(a,b)}} \cdot \max\{(1 - |a|^2)|f'(a)|, (1 - |b|^2)|f'(b)|\}.$$

Reciproc, fie $f : U \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă neconstantă pe discul unitate ce verifică inegalitatea anterioară. Atunci $f \in \mathcal{H}_u(U)$.

Demonstraţie. Presupunem că f este univalentă pe U şi definim funcţiile

$$g : U \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a}z}$$

şi

$$h : U \to \mathbb{C}, \quad h(z) = \frac{(f \circ g)(z) - (f \circ g)(0)}{(f \circ g)'(0)}.$$

Observăm că $g \in \mathcal{H}_u(U)$ şi $g(U) = U$, deci h este bine definită şi $h \in \mathcal{H}_u(U)$.

Avem că

$$h(z) = \frac{f\left(\dfrac{z + a}{1 + \overline{a}z}\right) - f(a)}{(1 - |a|^2)f'(a)}, \quad z \in U,$$

deci

$$h(0) = \frac{f(0)}{(1 - |a|^2)f'(a)} = 0$$

$$h'(z) = \frac{1}{(1 - |a|^2)f'(a)} \cdot \frac{1 + \overline{a}z - \overline{a}z - a\overline{a}}{(1 + \overline{a}z)^2} \cdot f'\left(\frac{z + a}{1 + \overline{a}z}\right)$$

$$h'(z) = \frac{1}{f'(a)(1 + \overline{a}z)^2} \cdot f'\left(\frac{z + a}{1 + \overline{a}z}\right)$$

Prin urmare $h'(0) = 1$ şi deducem că $h \in S$.

Din Teorema de deformare 2.1.1.14 obţinem:

$$|h(z)| \geq \frac{|z|}{(1 + |z|)^2}, \quad z \in U.$$

Pe de altă parte avem că:

$$\frac{\operatorname{sh}(2d_h(0,z))}{2e^{2d_h(0,z)}} = \frac{\operatorname{sh}\left(\ln\dfrac{1+|z|}{1-|z|}\right)}{2\cdot\dfrac{1+|z|}{1-|z|}} = \frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1+|z|}{1-|z|} - \dfrac{1-|z|}{1+|z|}\right)}{2\cdot\dfrac{1+|z|}{1-|z|}}$$

$$= \frac{\dfrac{(1+|z|)^2-(1-|z|)^2}{1-|z|^2}}{4\cdot\dfrac{(1+|z|)^2}{1-|z|^2}} = \frac{|z}{(1+|z|)^2}$$

Prin urmare are loc inegalitatea:

$$|h(z)| \geq \frac{\operatorname{sh}(2d_h(0,z))}{2e^{2d_h(0,z)}}, \quad z \in U.$$

Din Proprietatea 3.3.1 rezultă că

$$d_h(0,z) = d_h(g(0), g(z)), \quad z \in U.$$

Căutăm $z \in U$ astfel încât $g(z) = b$, adică

$$\frac{z+a}{1+\overline{a}z} = b, \text{ deci } z + a = b + \overline{a}bz$$

şi obţinem

$$z = \frac{b-a}{1-\overline{a}b} \in U.$$

În acest caz avem că $d_h(0,z) = d_h(a,b)$ şi înlocuind în inegalitatea obţinută avem:

$$\left|h\left(\frac{b-a}{1-\overline{a}b}\right)\right| \geq \frac{\operatorname{sh}(2d_h(a,b))}{2e^{2d_h(a,b)}},$$

adică

$$|f(b)-f(a)| \geq \frac{\operatorname{sh}(2d_h(a,b))}{2e^{2d_h(a,b)}}(1-|a|^2)|f'(a)|$$

Înlocuind pe a cu b şi pe b cu a obţinem că

$$|f(b)-f(a)| \geq \frac{\operatorname{sh}(2d_h(a,b))}{2e^{2d_h(a,b)}}(1-|b|^2)|f'(b)|,$$

deci

$$|f(b)-f(a)| \geq \frac{\operatorname{sh}(d_h(a,b))}{2e^{2d_h(a,b)}} \cdot \max\{(1-|a|^2)|f'(a)|, 1-|b|^2|f'(b)|\}, \quad a,b \in U.$$

Reciproc, presupunem că $f \in \mathcal{H}(U)$ este o funcţie neconstantă care satisface inegalitatea din ipoteză. Pentru ca f să fie univalentă pe U trebuie să arătăm că f este injectivă pe U.

Fie $a, b \in U$ astfel încât $f(a) = f(b)$. Atunci din inegalitatea din ipoteză rezultă că $f'(a) = f'(b) = 0$, deci f nu poate fi univalentă într-o vecinătate a lui a sau într-o vecinătate a lui b. Deducem că există două şiruri $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puncte distincte cu $a_n \in U$ şi $b_n \in U$, $n \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \quad \text{şi} \quad f(a_n) = f(b_n).$$

Din ipoteză avem că:

$$|f(a_n)-f(b_n)| \geq \frac{\operatorname{sh}(2d_h(a_n,b_n))}{2e^{2d_h(a_n,b_n)}}\cdot\max\{(1-|a_n|^2)|f'(a_n)|,(1-|b_n|^2)|f'(b_n)|\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

şi deducem că $f'(a_n) = f'(b_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Din Teorema 1.1.60 deducem că f este constantă, ceea ce contrazice ipoteza. Deci presupunerea că există $a, b \in U$ astfel încât $f(a) = f(b)$ este falsă şi în concluzie f este injectivă, deci $f \in \mathcal{H}_u(U)$.

Prezentăm în continuare un criteriu necesar şi suficient de univalenţă care îi aparţine lui Blatter (a se vedea [KiMi]).

Teorema 3.3.3. *Fie $f : U \to \mathbb{C}$ astfel încât $f \in \mathcal{H}_u(U)$ şi fie $a, b \in \mathbb{C}$. Atunci are loc inegalitatea:*

$$|f(a)-f(b)|^2 \geq \frac{\operatorname{sh}^2(2d_h(a,b))}{8\operatorname{ch}(4d_h(a,b))}\{[(1-|a|^2)|f'(a)|]^2+[(1-|b|^2)|f'(b)|]^\}.$$

Reciproc, fie $f : U \to \mathbb{C}$ astfel încât $f \in \mathcal{H}(U)$ şi f nu este constantă. Dacă pentru f are loc inegalitatea anterioară, atunci $f \in \mathcal{H}_u(U)$.

Demonstraţia acestui rezultat se bazează pe următoarele relaţii valabile pentru funcţii univalente pe discul unitate:

Dacă $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots$, atunci

$$|a_2| \leq 2, \quad |a_3| \leq 3 \quad \text{şi} \quad |a_3 - a_2^2| \leq 1.$$

Un alt rezultat datorat lui Kim şi Minda [KiMi] este următorul criteriu necesar şi suficient de univalenţă.

Teorema 3.3.4. *Fie $f : U \to \mathbb{C}$ astfel încât $f \in \mathcal{H}_u(U)$ şi fie $c \in \left(1, \frac{3}{2}\right]$ o constantă. Dacă pentru orice $a, b \in U$ şi $c \geq C$ are loc inegalitatea:*

$$|f(a) - f(b)| \geq \frac{\mathrm{sh}\,(2d_h(a,b))}{2[2\mathrm{ch}\,(2cd_h(a,b))]^{1/c}} \{[(1-|a|^2)|f'(a)|]^c + [(1-|b|^2)|f'(b)|]^c\}^{1/c}$$

atunci f este univalentă pe U.

Reciproc, fie $f : U \to \mathbb{C}$ astfel încât $f \in \mathcal{H}(U)$ şi f nu este constantă. Dacă f satisface inegalitatea anterioară, atunci $f \in \mathcal{H}_u(U)$.

3.4 Condiţii suficiente de univalenţă pentru funcţii olomorfe pe domenii convexe în $\mathbb{C}$

În această secţiune prezentăm două generalizări ale Teoremei lui Alexander (Teorema 1.3.1.12) obţinute de E. Janiec [Ja]. Dacă $\varphi \equiv 0$ în Teorema 3.4.1, se obţine Teorema 1.3.1.12.

Teorema 3.4.1. *Fie $A \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu convex, $f : A \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă şi $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Dacă are loc inegalitatea:*

$$\mathrm{Re}\, f'(z) + \varphi(\mathrm{Im}\, f(z)) \cdot \mathrm{Im}\, f'(z) > 0, \;\; \forall\; z \in A,$$

atunci f este univalentă pe A.

Demonstraţie. Fie $z_1, z_2 \in A$ cu $z_1 \neq z_2$. Vom demonstra că $f(z_1) \neq f(z_2)$, deci f este injectivă. Fie $\alpha = \arg(z_2 - z_1)$. Putem presupune fără a restrânge generalitatea că $\alpha \in [0, \pi)$.

Fie funcţiile

$$v(t) = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in [0, 1]$$

şi

$$g(t) = f(v(t)), \quad t \in [0, 1].$$

Deoarece A este domeniu convex, rezultă că $v(t) \in A$, $t \in [0, 1]$, deci g este bine definită.

Luăm mai întâi cazul când $\alpha = 0$. Fie ϕ o primitivă oarecare a funcţiei φ şi funcţia

$$h_1(t) = \operatorname{Re} g(t) + \phi(\operatorname{Im} g(t)), \quad t \in [0,1].$$

Atunci avem că

$$h_1'(t) = \operatorname{Re} g'(t) + \operatorname{Im} g'(t)\varphi(\operatorname{Im} g(t)),$$

adică

$$h_1'(t) = \operatorname{Re} f'(v(t))v'(t) + \operatorname{Im} f'(v(t))v'(t)\varphi(\operatorname{Im} f(v(t)))$$

$$h_1'(t) = (z_2 - z_1)[\operatorname{Re} f'(v(t)) + \varphi(\operatorname{Im} f(v(t)))\operatorname{Im} f'(v(t))], \quad t \in [0,1].$$

Din ipoteză avem că

$$\operatorname{Re} f'(v(t)) + \varphi(\operatorname{Im} f(v(t)))\operatorname{Im} f'(v(t)) > 0,$$

deoarece $v(t) \in A$. Rezultă că h_1 este strict monotonă, deci $h_1(0) \neq h_1(1)$, ceea ce implică $f(z_0) \neq f(z_1)$.

Fie acum $\alpha \in (0, \pi)$, deci $\operatorname{Im}(z_2 - z_1) > 0$. În această situaţie avem două cazuri posibile:

$$\varphi(\operatorname{Im} g(t)) \neq \operatorname{ctg} \alpha, \ \forall\ t \in [0,1]$$

sau există $t_1 \in [0,1]$ astfel încât $\varphi(\operatorname{Im} g(t_1)) = \operatorname{ctg} \alpha$.

Mai întâi analizăm cazul

$$\varphi(\operatorname{Im} g(t)) \neq \operatorname{ctg} \alpha, \ \forall\ t \in [0,1].$$

Fie $a = \min\limits_{t\in[0,1]} \operatorname{Im} g(t)$ şi $b = \max\limits_{t\in[0,1]} \operatorname{Im} g(t)$, atunci avem că

$$\varphi(x) \neq \operatorname{ctg} \alpha, \ \forall\ x \in [a,b].$$

Fie p o primitivă oarecare a funcţiei $\dfrac{1 + \varphi(x)\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \varphi(x)}$ şi funcţiile

$$q(x) = \begin{cases} p(x), & \text{dacă} \quad a < b \\ 0, & \text{dacă} \quad a = b. \end{cases}$$

$$h_2(t) = \operatorname{Re} g(t) + q(\operatorname{Im} g(t)), \quad t \in [0,1].$$

Atunci avem că

$$h_2'(t) = \operatorname{Re} g'(t) + \frac{1+\varphi(\operatorname{Im} g(t))\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \varphi(\operatorname{Im} g(t))} \cdot \operatorname{Im} g'(t), \quad t \in [0,1].$$

Prin calcul obţinem că

$$\operatorname{Re} g'(t) = \operatorname{Im}(z_2 - z_1)[\operatorname{Re} f'(v(t))\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{Im} f'(v(t))], \quad t \in [0,1]$$

şi

$$\operatorname{Im} g'(t) = \operatorname{Im}(z_2 - z_1)[\operatorname{Re} f'(v(t)) + \operatorname{Im} f'(v(t))\operatorname{ctg}\alpha], \quad t \in [0,1].$$

Înlocuind în expresia lui $h_2'(z)$ avem:

$$h_2'(t) = \frac{(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)\operatorname{Im}(z_2 - z_1)}{\operatorname{ctg}\alpha - \varphi(\operatorname{Im} g(t))}[\operatorname{Re} f'(v(t)) + \varphi(\operatorname{Im} g(t))\operatorname{Im} f'(v(t))], \quad t \in [0,1].$$

Din presupunerea făcută avem că $\varphi(\operatorname{Im} g(t)) \neq \operatorname{ctg}\alpha$, $t \in [0,1]$ şi ştiind că φ este funcţie continuă rezultă că $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \varphi(\operatorname{Im} g(t))$ are semn constant pe $[0,1]$.

În concluzie, ţinând cont de ipoteză rezulyă că $h_2'(t)$ are semn constant pe $[0,1]$, deci $h_2(0) \neq h_2(1)$, ceea ce implică $f(z_1) \neq f(z_2)$.

În continuar studiem al doilea caz, adică dacă există $t_1 \in [0,1]$ astfel înât

$$\varphi(\operatorname{Im} g(t_1)) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Din ipoteză, luând $z = v(t_1)$ rezultă că

$$\operatorname{Re} f'(v(t_1)) + \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{Im} f'(v(t_1)) > 0$$

şi din expresia lui $\operatorname{Im} g'(t)$ obţinem că

$$\operatorname{Im} g'(t_1) > 0.$$

Atunci există o vecinătate (t', t'') a lui t_1 din $[0,1]$ astfel încât

$$]Ig(t_1) < \operatorname{Im} g(t), \quad t \in (t_1, t'')$$

şi

$$\operatorname{Im} g(t) < \operatorname{Im} g(t_1), \quad t \in (t', t_1).$$

Pentru a arăta că $f(z_1) \neq f(z_2)$ arătăm că $\operatorname{Im} f(z_2) > \operatorname{Im} g(t_1) > \operatorname{Im} f(z_1)$.

Presupunem că $\operatorname{Im} f(z_1) \geq \operatorname{Im} g(t_1)$, dar ştim că

$$\operatorname{Im} g(t) < \operatorname{Im} g(t_1), \ \forall \ t \in (t', t_1),$$

deci există $t \in [0, t']$ astfel încât

$$\operatorname{Im} g(t) = \operatorname{Im} g(t_1).$$

Fie $s = \max\{t \in [0, t'] \mid \operatorname{Im} g(t) = \operatorname{Im} g(t_1)\}$.

Atunci

$$\operatorname{Im} g(t) < \operatorname{Im} g(t_1) = \operatorname{Im} g(s), \ \forall \ t \in (s, t_1).$$

Prin urmare

$$\operatorname{Im} g'(s) = \lim_{t \searrow s} \frac{\operatorname{Im} g(t) - \operatorname{Im} g(s)}{t - s} \leq 0.$$

Pe de altă parte avem că $\varphi(\operatorname{Im} g(s)) = \operatorname{ctg} \alpha$ şi

$$\operatorname{Im} g'(s) = \operatorname{Im}(z_2 - z_1)[\operatorname{Re} f'(v(s)) + \operatorname{Im} f'(v(s)) \operatorname{ctg} \alpha],$$

iar din ipoteză obţinem că $\operatorname{Im} g'(s) > 0$.

Deci am ajuns la contradicţie şi rezultă că presupunerea este falsă, adică $\operatorname{Im} f(z_1) < \operatorname{Im} g(t_1)$.

Analog se arată că $\operatorname{Im} g(t_1) < \operatorname{Im} f(z_2)$.

Am obţinut că $\operatorname{Im} f(z_1) < \operatorname{Im} f(z_2)$, deci $z_1 \neq z_2$.

Menţionăm că acest raţionament funcţionează şi dacă $t_1 = 0$ sau $t_1 = 1$, arătând că $\operatorname{Im} f(z_2) > \operatorname{Im} g(0) = \operatorname{Im} f(z_1)$, respectiv $\operatorname{Im} f(z_1) < \operatorname{Im} g(1) = \operatorname{Im} f(z_2)$. Astfel demonstraţia teoremei este încheiată pentru toate cazurile.

Observaţia 3.4.2. E. Janiec [Ja] a arătat că rezultatul din Teorema 3.4.1 rămâne valabil dacă condiţia de continuitate asupra funcţiei φ este înlocuită cu continuitatea funcţiei φ pe $\mathbb{R} \setminus B$, unde B este o mulţime finită sau infinită numărabilă (deci B este o mulţime de măsură Lebesgue nulă).

Bibliografie

[An] V. Anisiu, *Topologie şi Teoria Măsurii*, Lito. Univ. Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1993.

[BG] C. A. Bernstein, R. Gay, *Complex Variables: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[Co] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[Du] P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[F] G. B. Folland, *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*, J. Wiley & Sons Inc., New York, 1999.

[GS] D. Gaspar, N. Suciu, *Analiză Complexă*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1999.

[GK] I. Graham, G. Kohr, *Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions*, Marcel Dekker Inc., New York, 2003.

[HMN] P. Hamburg, P. Mocanu, N. Negoescu, *Analiză Matematică (Funcţii Complexe)*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[He] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis, I-III*, Wiley Classical Library, J. Wiley & Sons, New York, 1993.

[Ja] E. Janiec, *Some sufficient conditions for univalence of holomorphic functions*, Dem. Math., 22(1989), nr. 3, 717-727.

[KiMi] S. A. Kim, D. Minda, *Two point distortion theorems for univalent functions*, Pacif. J. Math., 163(1994), 137-157.

[KM] G. Kohr, P. T. Mocanu, *Capitole Speciale de Analiză Complexă*, Presa Univ. Clujeană, 2005.

[Kr] S. G. Krantz, *Handbook of Complex Variables*, Birkhäuser, 1994.

[MBS] P. T. Mocanu, T. Bulboacă, G. Şt. Sălăgean, *Teoria Geometrică a Funcţiilor Univalente*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 1999.

[Po] C. Pommerenke, *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[Pop] E. Popa, *Introducere în Teoria Funcţiilor de o Variabilă Complexă. Exerciţii şi Probleme*, Editura Univ. Alexandru Ioan Cuza, Iaşi, 2001.

[Pr] A. Precupanu, *Analiză Matematică. Funcţii Reale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.

[RR] M. Rosenblum, J. Rovnyak, *Topics in Hardy Classes and Univalent Functions*, Birkhäuser, 1994.

[Ro] H. L. Royden, *Real Analysis*, (Third Edition), MacMillan, New York, 1988.